Задача №1

Найти число целых решений неравенства $2|x^2+x-10| \le |x^2+6x-8|$

Решение задачи 1

Задача предложена Никитой Юрьевичем Нецветаевым, д.ф.-м.н., проф., зав. кафедрой геометрии математико-механического факультета СПбГУ

Возводя исходное неравенство в квадрат, перенося правую часть влево с минусом и раскладывая на множители, получаем равносильное неравенство

$$4|x^2+x-10|^2-|x^2+6x-8|^2=(2(x^2+x-10)+(x^2+6x-8))(2(x^2+x-10)-(x^2+6x-8))=$$
$$=(3x^2+8x-28)(x^2-4x-12)=(x-2)(3x+14)(x+2)(x-6)\le 0.$$

Решая его методом интервалов, находим: $x\in[-14/3;-2]\cup[2;6]$, откуда ответ 8.

Задача №2

Основания двух равнобедренных треугольников площади S лежат на одной прямой, а вершина одного из них является серединой высоты другого. Чему равна площадь общей части треугольников?

Решение задачи 2

Задача предложена Никитой Юрьевичем Нецветаевым, д.ф.-м.н., проф., зав. кафедрой геометрии математико-механического факультета СПбГУ

Обозначим концы основания первого (``широкого’’) треугольника через A и B, вершину второго (``высокого’’) треугольника – через C, а общую середину их оснований – через H. Тогда боковые стороны исходных треугольников будут медианами в треугольниках ACH и CHB. Проведя третьи медианы, мы разобьем каждый из треугольников ACH и CHB, а с ними и каждый из исходных треугольников на 6 равновеликих треугольничков, причем общая часть исходных треугольников состоит из 4 таких треугольничков, откуда ответ 2S/3.

Задача №3

При скольких целых a число $\dfrac{a^2+1}{a-12}$ тоже целое?

Решение задачи 3

Подбор задач и написание решений: В. Шарич, СУНЦ МГУ

Сделаем замену a=b+12. Тогда исходное выражение примет вид $(b^2+24b+145)/b=b+24+145/b$. Поэтому задача сводится к определению числа целых делителей у числа 145. Таких чисел восемь: ±1, ±5, ±29, ±145.

Задача №4

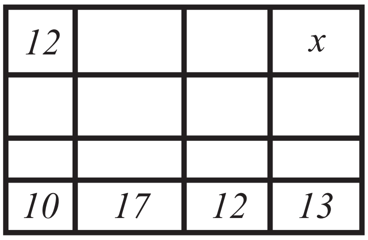
На каждой стороне треугольника отметили три точки: две, делящие сторону на три равные части, и середина стороны. После этого вершины треугольника соединили с точками, отмеченными на противолежащих этим вершинам сторонах. Сколько внутренних точек треугольника принадлежат хотя бы двум из 9 проведенных отрезков?

Решение задачи 4

Подбор задач и написание решений: В. Шарич, СУНЦ МГУ

Отмеченные точки делят стороны в отношениях 2/1, 1/1, 1/2. Всего фактов пересечения 27: каждый отрезок пересекается с каждым, выпущенным из другой вершины. Чтобы найти число различных точек пересечения, необходимо уменьшить это число на удвоенное количество тройных пересечений (четверных пересечений нет, а каждое тройное пересечение вместо трех точек пересечения дает одну). Чтобы найти число тройных пересечений, воспользуемся теоремой Чевы: три отрезка AP, BQ, CR (P лежит на отрезке BC, Q – на CA, R — на AB) пересекаются в одной точке, если и только если $BP/PC \cdot CQ/QA \cdot AR/RB=1$. Поскольку каждое из трех отношений может равняться либо 2/1, либо 1/1, либо 1/2, всего вариантов получить единицу ровно 7. Итого $27-2\cdot 7=13$.

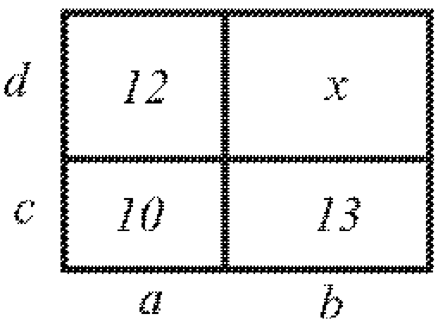
Задача №5



Прямоугольник разбит на 16 меньших прямоугольников. Периметр пяти из них указан на рисунке. Чему равен периметр прямоугольника x?

Решение задачи 5

Задачу предложил С.А. Ануфриенко, доцент кафедры математики СУНЦ УрГУ



Для решения задачи достаточно рассмотреть только четыре угловых прямоугольника. Обозначим длины сторон этих прямоугольников так, как это сделано на рис.~2. Имеем систему

$$2a+2c=10,$$
$$2a+2d=12,$$
$$2b+2c=13.$$

К третьему уравнению системы прибавим второе и вычтем первое, получится $2b+2d=13+12-10=15$. Следовательно, $x=15$.

Задача №6

В комнате стояли пять пар белых кроссовок размеров 38, 39, 40, 41 и 42, а также пять пар черных кроссовок тех же размеров. Шутник Вася Пупочкин смешал их в одну кучу и выкрутил лампочку. Какое наименьшее количество кроссовок нужно вынести из темной комнаты, чтобы гарантировано получить годную пару обуви (т.е. пару кроссовок одного размера и цвета)?

Решение задачи 6

Задачу предложил С.А. Ануфриенко, доцент кафедры математики СУНЦ УрГУ

Десяти кроссовок будет явно недостаточно, поскольку пять белых левых и пять правых черных кроссовок будут составлять неудачную попытку. Одиннадцати будет вполне достаточно, так как существует только десять различных сочетаний цвета и размера обуви (применение принципа Дирихле к десяти коробкам обуви).