Задача №1

Вокруг окружности описана равнобочная трапеция с острым углом x. В каком отношении делят друг друга ее диагонали?

Решение задачи 1

Пусть AD - нижнее основание трапеции, а BC- верхнее. Отношение, в котором делят друг друга диагонали, очевидно равно отношению оснований $BC:AD$. Опустим из вершин B и C перпендикуляры BK и CL на основание AD. Положим $AB=1$. Тогда $AK=LD=\cos x$, $KL=BC$. Поскольку трапеция описанная, то $AD+BC=AB+CD=1+1=2$, т.е. $2=2AK+2BC=2\cos x+2BC$. Следовательно, $BC=1-\cos x$ и $AD=1+\cos x$, откуда ответ: в отношении

$$\frac{1-\cos x}{1+\cos x}=\frac{(1-\cos x)^2}{\sin^2 x}=(1-tgx)^2.$$

Задача №2

Дана функция $F(x)=|4-4|x||-2$. Сколько решений имеет уравнение $F(F(x))=x$?

Решение задачи 2

Обозначим $F(x)$ через y. Чтобы решить уравнение, достаточно решить систему $\begin{cases} y=F(x) \\ x=F(y) \end{cases}$; в частности, решений у них поровну. Решим систему графически. Для этого нарисуем графики участвующих в ней функций. Они имеют вид буквы W и буквы W, повернутой набок, и ``вписаны в квадрат'' $|x|,|y|\le 2$. Увидим, что у них 16 точек пересечения, каждая из которых дает решение системы.

Задача №3

Дана прямоугольная таблица $m\times n,\ \ m,n>1$ заполненная числами так, что в левом верхнем углу стоит единица, а каждое число вдвое больше как соседа слева, так и соседа сверху. Под *линией* будем понимать строку или столбец таблицы. Разрешается проделывать операции четырех типов: все числа в одной и той же линии умножить на два; все числа в одной и той же линии разделить на два; все числа в одной линии уменьшить на 1; все числа в одной линии увеличить на 1. Можно ли за конечное число таких действий добиться того, чтобы во всех клетках оказались числа, обратные исходным? (Обратным к числу x называется число $1/x$)

Решение задачи 3

Подбор задач и написание решений: В. Шарич, СУНЦ МГУ

Из условия следует, что в каждой строке расположены степени двойки по возрастанию; поэтому мы сначала можем делением на 2 добиться того, чтобы все строки совпадали с первой. (Для этого k-ю строку поделим на два k-1 раз.) Затем путем операций со столбцами, заключающихся в прибавлении и вычитании 1, можно добиться того, чтобы все столбцы состояли из чисел, обратных исходным числам первой строки. Осталось произвести нужное количество делений строк на 2 чтобы получить искомый набор чисел. (Для этого k-ю строку снова поделим на два k-1 раз.)

Задача №4

Можно ли квадрат со стороной 1 разрезать на 2009 частей, из которых можно сложить треугольник с высотой $\frac{1}{2009}$? (Каждый кусок разбиения должен быть использован ровно один раз.)

Решение задачи 4

Подбор задач и написание решений: В. Шарич, СУНЦ МГУ

Для удобства присоединим границу кусков к самим кускам разбиения, т.е. Будем считать их замкнутыми. Треугольник с высотой 1/2009 и площадью 1 должен иметь сторону длины 4018. Рассмотрим покрытие этой стороны частями, принадлежащими кускам разбиения квадрата. Всего таких частей не более 2009, значит, какая-то из них содержит две точки на расстоянии 4018/2009=2. Но это невозможно, так как самое большое расстояние в единичном квадрате — это $\sqrt{2}$, что меньше двух.

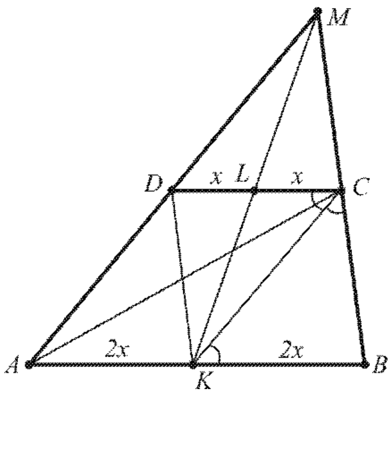
Задача №5

Точки K и L – середины оснований AB и CD трапеции ABCD соответственно. Оказалось, что AB=2CD, а точка K лежит на биссектрисе угла C. Доказать, что AC=2KL.

Решение задачи 5

Задачу предложил С.А. Ануфриенко, доцент кафедры математики СУНЦ УрГУ

Достроим трапецию ABCD до треугольника ABM и будем использовать обозначения. По условию CK является биссектрисой угла C, отсюда $\angle KCB = \angle KCD = \angle CKB$. Значит, треугольник CKB равнобедренный. Четырехугольник ADCK является параллелограммом (его противоположные стороны AK и DC равны и параллельны), поэтому треугольники CKB и MAB подобны. Таким образом, треугольник AMD также равнобедренный и его равными сторонами будут AB и BM. Отрезок DC очевидно является средней линией в треугольнике ABM, поэтому AC – медиана этого треугольника. Отрезки AC и MK равны, поскольку они – суть медианы, проведенные к равным сторонам в равнобедренном треугольнике. Средняя линия CD делит медиану MK пополам, отсюда 2LK=MK=AC.



Задача №6

Доказать, что числа $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ не могут быть членами одной и той же арифметической прогрессии.

Решение задачи 6

Задачу предложил С.А. Ануфриенко, доцент кафедры математики СУНЦ УрГУ

Предположим противное, и эти три числа являются соответственно n-м, k-м и l-м членами некоторой арифметической прогрессии с первым членом a1 и разностью d.
Из системы

$$\sqrt{2} = a_1 + d_{n-1}$$
$$\sqrt{3} = a_1 + d_{k-1}$$
$$\sqrt{5} = a_1 + d_{l-1}$$

получаем $\sqrt{5} - \sqrt{3} = d(l-k)$ и $\sqrt{3} - \sqrt{2} = d(k-n)$.
Очевидно, что левые части этих уравнений не равны нулю, и поэтому после деления соответственно левых и правых частей последних двух уравнений, приходим к

$\dfrac{l-k}{k-n} = \dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \sqrt{15} + \sqrt{10} - \sqrt{6} - 3$. Первое число в этом уравнении рационально, а последнее – иррационально. Противоречие.
Иррациональность числа $\sqrt{15} + \sqrt{10} - \sqrt{6}$ доказывается от противного. Пусть найдется такая рациональная дробь $\dfrac{p}{q}$, что $\dfrac{p}{q} = \sqrt{15} + \sqrt{10} - \sqrt{6}$. Тогда $\dfrac{p^2}{q^2} + 15 - \dfrac{2p}{q}\sqrt{15} = 16 - 4\sqrt{15}$ или, после несложных преобразований

$\sqrt{15} = \dfrac{p_1}{q_1}$, где $\dfrac{p_1}{q_1}$ – несократимая дробь. Отсюда $15q_1^2 = p_1^2$. Левая часть этого уравнения делится на пять, поэтому правая часть (являясь полным квадратом целого числа) делится на 25, а q_1 не кратно пяти, поскольку дробь $\dfrac{p_1}{q_1}$.
