Задача №1

Находясь на поверхности небольшого сферического астероида радиуса R = 15 км, астронавт «вспомнил», что дальше всего летит камень, брошенный под углом 45^0 к горизонту. Астронавт попытался бросить камень под таким углом. Его напарник при помощи приборов зафиксировал, что камень был брошен со скоростью υ = 20 м/с, но под углом немного меньшим, а именно 40^0 к горизонту (точнее говоря, под углом 50^0 к вертикали). Оказалось, что камень действительно упал на астероид «наиболее далеко», а именно он попал в диаметрально противоположную точку на астероиде. Чему равна масса астероида?

Значение гравитационной постоянной:G = $6{,}67\cdot10^{-11}$ Н·м^2/кг^2.

Решение задачи 1

Задача предложена Александром Викторовичем Ляпцевым профессором физического факультета СПбГУ, д.ф.-м.н.

Из того, что тело упало на астероид, следует, что начальная скорость была меньше 2-й космической скорости для данного астероида, и тело двигалось по эллиптической орбите (рис. 7).

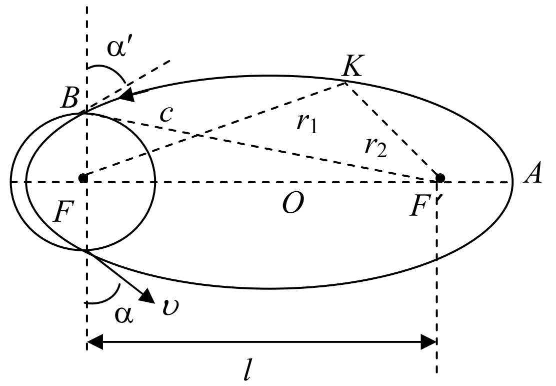


Рис. 7.

Центр астероида находится в одном из фокусов эллипса. При движении тела в поле тяготения астероида сохраняется механическая энергия E и момент импульса L относительно фокуса F. По определению момент импульса равен произведению:

$$L = mur\sin\varphi, \qquad (21)$$

где m – масса тела, движущегося в поле тяготения астероида, u скорость тела в некоторый момент времени, r – расстояние от центра астероида (фокуса F) до тела, φ - угол между вектором скорости $\mathbf{u}$ и радиус-вектором $\mathbf{r}$, определяющим положение тела относительно центра астероида ($|\mathbf{r}|=r$).

Из закона сохранения момента импульса следует, в частности, что углы α и α' на рис. 7 равны. Это означает, что диаметр астероида, проходящий через точки начала и конца движения тела, параллелен малой оси эллипса (перпендикулярен большой оси).

Из свойств эллипса следует, что сумма расстояний от фокусов (фокусы расположены на большой оси симметрично относительно центра эллипса) до некоторой точки, лежащей на орбите, (на рис.7 точка K) остается постоянной величиной при движении тела:

$$r_1 + r_2 = \text{const}. \qquad (22)$$

Среди всех точек орбиты можно выделить две точки: наиболее удаленная от фокуса F точка (на рис. 7 точка A), и наиболее близкая к фокусу F точка (точка противоположная точке A, находящаяся в данном случае внутри астероида). При движении спутников в поле тяготения Земли эти точки называются апогеем и перигеем. Мы используем эти названия и в данной задаче. Обозначая расстояния от фокуса F до апогея и перигея через r_a и r_n, несложно показать, что их сумма равна константе в формуле (22), так что для произвольной точки K получим:

$$r_1 + r_2 = r_a + r_n. \qquad (23)$$

Применим теперь равенство (23) для точки B, в которую упало тело (или для точки из которой вылетело тело). Обозначая расстояние от B до F' через c, получим:

$$R + c = r_a + r_n. \qquad (24)$$

Обозначая расстояние между фокусами через l и рассматривая прямоугольный треугольник FBF', получим:

$$c^2 = R^2 + l^2. \qquad (25)$$

Расстояние l несложно выразить через расстояния в апогее и перигее:

$$l = r_a - r_n. \qquad (26)$$

Исключая из равенств (23)–(26) величины c и l, получим соотношение, связывающее радиус астероида и расстояния в апогее и перигее:

$$2r_ar_n = R(r_a + r_n). \qquad (27)$$

Расстояния в апогее и перигее можно найти, используя законы сохранения энергии и момента импульса. Закон сохранения энергии для произвольной точки орбиты может быть записан в виде:

$$E = \frac{mu^2}{2} - \frac{GMm}{r} \qquad (28)$$

Напомним, что при движении по эллиптической орбите полная энергия отрицательна. В точках апогея и перигея $\varphi = 90^0$, поэтому скорость можно выразить через момент импульса в виде:

$$u = \frac{L}{mr}. \qquad (29)$$

Подставляя это выражение в формулу (28), получим квадратное уравнение, определяющее расстояния в апогее (больший корень уравнения) и перигее (меньший корень):

$$r^2 + \frac{GMm}{E}r - \frac{L^2}{2mE} = 0. \qquad (30)$$

Для решения данной задачи нет необходимости находить корни уравнения, достаточно использовать теорему Виета, связывающую сумму и произведение корней квадратного уравнения с коэффициентами этого уравнения. В данном случае мы получим:

$$r_a + r_n = -\frac{GMm}{E}, \quad r_ar_n = -\frac{L^2}{2mE}.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (27), найдем выражение для массы астероида:

$$M = \frac{L^2}{m^2GR}.$$

Величина L определяется начальными условиями:

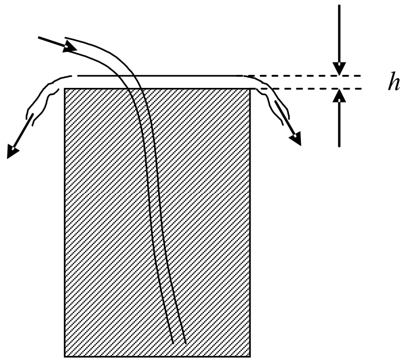
$$L = m\upsilon R\sin\alpha,$$

так что окончательно получим:

$$M = \frac{(\upsilon\sin\alpha)^2 R}{G}.$$

Подставляя в это выражения данные в задаче численные значения, найдем: $M = 5{,}28\cdot10^{16}$ кг. Несложно также найти значение плотности астероида: $\rho = 4{,}87\cdot10^3$ кг/м^3, что близко к средней плотности планет земной группы.

Задача №2



Хозяин дачного участка наполняет из водопровода 200 литровую бочку. После того, как бочка заполняется, вода из нее начинает выливаться, при этом уровень воды в бочке оказывается выше кромки бочки на некоторую величину h (см. рис). В среду пустая бочка наполнилась за 6 минут. В субботу напор воды был слабее, и та же пустая бочка наполнилась за 9 минут. Во сколько раз уровень h когда вода начала выливаться из бочки, в среду был больше, чем в субботу.

Решение задачи 2

Задача предложена Александром Викторовичем Ляпцевым профессором физического факультета СПбГУ, д.ф.-м.н.

Задачу проще всего решить, используя метод размерностей. Обозначим объем воды, вытекающий из бочки в единицу времени через Q. Размерность этой величины равна, очевидно:

$[Q] = \mathrm{L}^3\mathrm{T}^{-1}$.

Поскольку диаметр бочки существенно превосходит уровень поднятия воды над кромкой бочки, то при решении задачи можно мысленно «распрямить» окружность кромки в прямой отрезок и рассматривать процесс, как процесс перетекания воды через прямолинейную плотину. Таким образом, количество вытекающей воды оказывается пропорциональным «длине плотины», то есть диаметру бочки D:

$Q = Dq$.

Величина q пропорциональна объему воды, вытекающему в единицу времени через единицу кромки бочки и имеет размерность:

$[q] = \mathrm{L}^2\mathrm{T}^{-1}$.

Для решения задачи следует проанализировать, от каких параметров задачи может зависеть величина q. Такими параметрами могут быть высота уровня воды над кромкой бочки h, ускорение свободного падения g и плотность воды ρ. Поскольку размерность ρ пропорциональна М, а размерности других параметров (q, h, g) не включают в себя М, то можно сделать вывод, что величина q не зависит от плотности жидкости. Таким образом, величину q можно представить в виде произведения:

$q = Ch^xg^y$,

где C – некоторая безразмерная константа. Величины x и y находятся элементарно из равенства размерностей правой и левой частей равенства, так что:

$$q = C\sqrt{gh^3} . \qquad (31)$$

В стационарном режиме после наполнения бочки, количество воды, вытекающее из шланга, равно количеству воды, вытекающему из бочки. Время наполнения бочки t, объем бочки V и величина Q связаны соотношением:

$$V = Qt. \qquad (32)$$

Из формул (31) и (32) следует, что время наполнения бочки пропорционально $h^{-3/2}$, и, соответственно t пропорционально $h^{-2/3}$. Таким образом, получаем ответ задачи:

$$h_1 / h_2 = (t_1 / t_2)^{-2/3} = (6/9)^{-2/3} = (3/2)^{2/3} .$$

Задача №3

Четыре одинаковых маленьких шарика имеют массы m, и заряды q. К каждому из шариков прикреплена одним концом невесомая, непроводящая и нерастяжимая нить длины L. Свободные концы нитей связали вместе узлом, и отпустили шарики в вакууме вдали от всех тел. В положении равновесия шарики покоятся, а нити попарно образуют углы $\varphi_0 = 109°28`$. К одному из шариков в момент времени t=0 приложили силу F, направленную вдоль привязанной к нему нити в сторону «от узла связи». Найдите ускорения всех шариков сразу после приложения силы.

Решение задачи 3

Автор задачи - Варламов С.Д., СУНЦ МГУ

В момент времени, когда сила уже приложена и все нити успели натянуться по новому (не так, как в положении равновесия, имевшем место, когда сила F еще не была приложена), проекции скоростей и ускорений грузов на направления нитей, связывающих эти грузы, должны быть одинаковыми.

Обозначим величину ускорения того груза, к которому приложена сила F, символом A. Величины ускорений других грузов обозначим символами a. Силы натяжения трех нитей (одинаковые) обозначим символами T.

Ускорения грузов, к которым не прилагается сила F, направлены вдоль нитей.

Уравнение движения грузов:

$$\begin{array}{ll} \textit{Первый груз} & 2-4\,\textit{грузы} \\ mA = F - 3T\cos(\pi-\varphi) & ma = T \end{array}$$

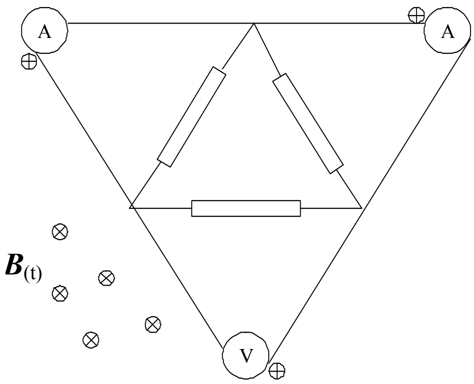
$$\textit{Кинематические связи}:$$

$$A\cos(\pi-\varphi) = a$$

$$\frac{F}{T} = \frac{3\cos^2(\pi-\varphi)+1}{\cos(\pi-\varphi)} \qquad \textit{отсюда}:$$

$$A = \frac{F}{m}\times\frac{1}{3\cos^2(\pi-\varphi)+1}; \qquad a = \frac{F}{m}\times\frac{\cos(\pi-\varphi)}{3\cos^2(\pi-\varphi)+1}.$$

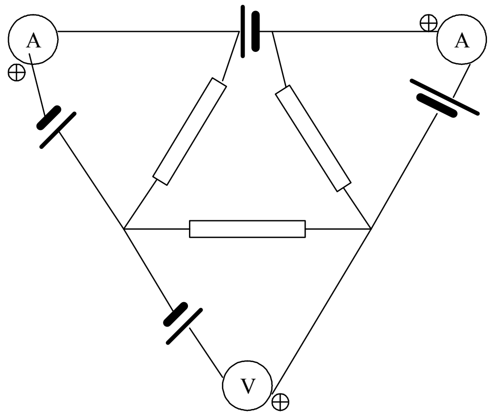
Задача №4



Однородное магнитное поле меняется по закону $\boldsymbol{B}_{(t)}=\boldsymbol{B}_0 t/\tau$. В плоскости перпендикулярной вектору $\boldsymbol{B}_0$ находится проволочная конструкция с тремя одинаковыми резисторами с сопротивлениями R и с тремя идеальными измерительными приборами, положительные клеммы которых показаны символами «+» в кружочках. (см. рисунок). Площади всех четырех малых правильных треугольников одинаковы и равны S. Каковы показания всех приборов?

Решение задачи 4

Автор задачи - Варламов С.Д., СУНЦ МГУ



В каждом из малых треугольников схемы при изменении магнитного поля индуцируется ЭДС, равная по величине SB/τ.

Эквивалентная схема для расчета показаний приборов может быть нарисована так:

Вольтметр показывает отрицательное напряжение $U=-4SB/\tau$.

Амплитудные значения токов через резисторы равны:
Для «левого» $i_{лев}=SB/(R\tau)$, $i_{прав}=SB/(R\tau)$, $i_{нижн}=3SB/(R\tau)$.

Оба амперметра показывают отрицательные значения токов. Они вычисляются с применением правил Кирхгофа для узлов. Показания амперметров одинаковы и равны $I_{лев}=I_{прав} = -4SB/(R\tau)$.

Задача №5

Найти молярную теплоёмкость идеального газа в процессе, при котором температура газа пропорциональна квадрату объёма. Теплоёмкость 1 моля газа при постоянном объёме равна C_V.

Решение задачи 5

Задачу предложил СУНЦ УрГУ

Запишем первое начало термодинамики.

$$Q = \Delta U + A,$$

где Q – количество теплоты, подведённое к газу, A – работа газа, ΔU - изменение внутренней энергии, $\Delta U = c_V \Delta T,\ \Delta T$ - изменение температуры.

Зная, что $T = \propto V^2$, установим зависимость давления от объёма

$$pV = RT,$$
$$T = \propto V^2,$$
$$p(V) = \propto R\, V.$$

Работа газа (можно посчитать как площадь под графиком p(V), начальный объём V_0, конечный V) равна

$$A = \frac{\propto RV^2}{2} - \frac{\propto R{V_0}^2}{2} = \frac{R}{2}(T - T_0) = \frac{R}{2}\Delta T.$$

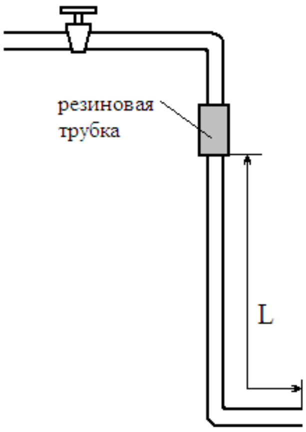
Тогда

$$Q = c_V \Delta T + \frac{R}{2}\Delta T.$$

Следовательно, молярная теплоёмкость равна

$$c = c_V + \frac{R}{2}.$$

Задача №6



К водопроводному крану с помощью резиновой трубки прикреплена стеклянная трубка длиной L и сечением S, загнутая на конце под прямым углом. Найти угол, на который отклоняется трубка от вертикали, если скорость истечения воды равна V, масса трубки M. Упругостью резиновой трубки можно пренебречь.

Решение задачи 6

Задачу предложил СУНЦ УрГУ

Пусть за время Δt из крана вытек объём ΔV=SVΔt. Масса вытекшей воды Δm =$\rho\Delta V$. На трубку со стороны воды действует сила

$$F = \rho S V^2.$$

Трубка будет отклоняться от вертикали. Пусть в равновесном состоянии от вертикали она отклонена на угол α

На трубку с водой действует сила тяжести, равная

$$F' = (M + SL\rho)g.$$

Моменты сил относительно края трубки

$$FL = F'\frac{L}{2}\sin\propto.$$

Тогда

$$\sin\propto = \frac{2\rho S V^2}{(M + \rho SL)g}.$$