

ФИЗИКА

8 класс

Задача 1

Задача предложена АГ СПбГУ

В сосуд налита вода (рис.1).

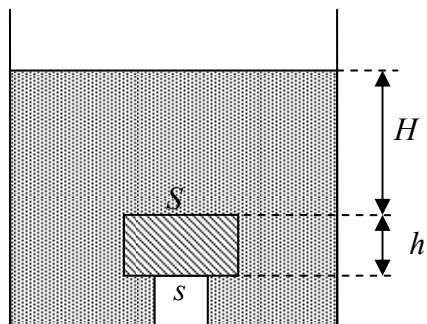


Рис.1.

В нижней части сосуда имеется трубка сечением s , которая закрыта цилиндрической пробкой, сделанной из дерева, с плотностью $0,4$ от плотности воды. Плотность сечения пробки равна $S=5s$. Высота пробки h . Вода налита так, что уровень воды находится на расстоянии H от верхнего края пробки. При каком минимальном отношении H/h пробка не будет всплывать?

Решение

1. Сверху на пробку действует сила давления воды, равная:

$$F_{\bar{a}} = S(P_0 + \rho g H),$$

где P_0 – атмосферное давление, ρ – плотность воды. Снизу на пробку действует сила давления воды, равная:

$$F_{i1} = (S - s)(P_0 + \rho g(h + H)),$$

а также сила давления воздуха:

$$F_{i2} = sP_0.$$

На пробку также действует сила тяжести, равная:

$$F_T = S\rho_0 g h,$$

где ρ_0 – плотность пробки.

Чтобы пробка не всплывала необходимо выполнение неравенства:

$$F_{\bar{a}} + F_T > F_{i1} + F_{i2}.$$

После подстановки выражений для сил и некоторых сокращений получаем неравенство:

$$S\rho H + S\rho_0 h > (S - s)\rho(h + H).$$

Введем для сокращения записи обозначения:

$$\frac{S}{s} = \sigma, \quad \frac{H}{h} = n, \quad \frac{\rho_0}{\rho} = \xi.$$

Разделив обе части последнего неравенства на s , h и ρ , получим неравенство:

$$\sigma n + \sigma \xi > (\sigma - 1)(1 + n).$$

Это неравенство можно разрешить относительно n :

$$n > \sigma(1 - \xi) - 1.$$

Подставляя численные значения $\sigma=5$, $\xi=0,4$, получим:

$$n > 2.$$

Ответ: 2.

Задача 2

Задача предложена АГ СПбГУ

Некоторое вещество плавится при температуре t_0 . Для нагревания 1 кг этого вещества от $t_0 - 4$ до $t_0 + 8$ градусов требуется 382 кДж. Для нагревания 1 кг этого вещества от $t_0 - 4$ до $t_0 + 4$ градусов требуется 365,2 кДж. Для нагревания 1 кг этого вещества от $t_0 - 8$ до $t_0 + 4$ градусов требуется 373,6 кДж. Чему равна удельная теплота плавления этого вещества в кДж/кг.

Решение

Обозначим через c_m и $c_{ж}$ – удельные теплоемкости твердого тела и жидкости, а через λ – удельную теплоту плавления. Вычисляя теплоты, необходимые для нагревания тела в трех данных в задаче случаях, получим систему уравнений:

$$\begin{aligned}4c_m + 8c_{ж} + \lambda &= 382, \\4c_m + 4c_{ж} + \lambda &= 365,2, \\8c_m + 4c_{ж} + \lambda &= 373,6,\end{aligned}$$

где наименование кДж для краткости опущено. Решая систему уравнений, получим ответ: $\lambda = 340$ кДж/кг.

Решать систему уравнений можно различными методами. Проще всего сложить 1-е и 3-е уравнения, в результате чего получается новое уравнение:

$$12(c_m + c_{ж}) + 2\lambda = 755,6.$$

Второе уравнение умножаем (обе части) на 3:

$$12(c_m + c_{ж}) + 3\lambda = 1095,6.$$

Ответ получается вычитанием из последнего уравнения предпоследнего.

Ответ: 340 кДж/кг (лед – вода).

Задача 3

Задача предложена Александром Рафаиловичем Зильберманом.

На кухне в школе имеется сосуд кубической формы, который разделен перегородками одинаковой толщины на три отсека. Перегородки при рассматривании сверху составляют букву «Т». Объемы двух отсеков одинаковы и равны $\frac{1}{4}$ части объема всего сосуда, а объем третьего отсека равен $\frac{1}{2}$ объема сосуда. Площади перегородок, отделяющих каждый отсек от любого соседнего отсека, одинаковы. Внешние стенки, дно и крышка сосуда снаружи покрыты очень плохо проводящими тепло материалами. В отсеки этого сосуда налили жидкости разной температуры до одного и того же уровня. В самый большой по объему отсек налит суп с начальной температурой 60°C . В одном из малых отсеков – чай с начальной температурой 85° , а во втором малом отсеке – компот с начальной температурой 35°C . Через две минуты после того, как жидкости были залиты, температура чая стала равной 83°C . Какими в этот момент были температуры супа и компота? Теплоемкостями стенок и перегородок можно пренебречь в сравнении с теплоемкостями жидкостей.

Решение

Скорость передачи теплоты через перегородки пропорциональна разности температур, и поскольку все свойства перегородок одинаковы (площади, толщины, материалы), то количество теплоты переданной чаем в точности равно количеству теплоты, полученной компотом, а баланс теплоты для супа нулевой. Поэтому температура супа осталась прежней 60°C , а компот нагрелся на 2° , и его температура в этот момент равна 37°C .

Задача 4

Задача предложена Сергеем Дмитриевичем Варламовым.

Археолог, откопавший скелет динозавра, определил его возраст: 100 миллионов лет и оценил массу динозавра, когда он был жив, в 10 тонн. Оцените количество молекул воды в вашем организме, которые когда-то находились в теле этого животного.

Решение

Тела всех наземных животных примерно на 80% состоят из воды. В теле динозавра было $M=8$ тонн воды, в 70 кг массы тела человека (примерная масса участника олимпиады) содержится около $m=55$ кг воды. Количество воды на Земле за сотню миллионов лет не изменилось. Если считать, что за этот срок вода основательно «перемешалась» и равномерно распределилась всюду (в океане, морях, озерах), то молекулы воды, содержащиеся в 8 тоннах, равномерно распределены во всех водоемах. Если принять, что вся Земля покрыта одним и тем же слоем воды около $H=3,5$ км (3,7 км – средняя глубина океана), то концентрация «динозавровых» молекул равна примерно:

$$n = (M \times A / \mu) / (H \times 4\pi R_{\text{Земли}}^2) = 1,5 \times 10^{11} \text{ м}^{-3} = 150 \text{ млрд/м}^3.$$

Здесь A – число Авогадро, μ – молярная масса воды. Следовательно в каждом из нас в среднем находится около $n \times 0,055 \text{ м}^3 = 8$ млрд «динозавровых» молекул.

Задача 5

Задача предложена Сергеем Дмитриевичем Варламовым.

Средний срок службы ламп накаливания 100 Вт/220В и люминесцентных ламп с одинаковой «производительностью по свету» примерно одинаков – около 2000 часов. Эффективность ламп накаливания в 5 раз меньше, чем у люминесцентных. Стоимости этих ламп отличаются в 15 раз: 10 руб и 150 руб за штуку (люминесцентные дороже). При какой стоимости 1 кВт×час электроэнергии выгодно покупать и использовать более дорогие лампы?

Решение

Выгодно покупать и использовать люминесцентные лампы только при выполнении неравенства:

$$150 + 0,1 \times 2000 \times X / 5 < 10 + 0,1 \times 2000 \times X$$

Где X – это цена одного кВт×часа электроэнергии. Отсюда $X > 0,875$ руб/кВт.

Задача 6

Задача предложена Сергеем Дмитриевичем Варламовым.

В полдень 21 марта с экватора Земли Луна видна освещенной ровно наполовину. Каков угол между отрезками ЛЗ и ЛС, на концах которых находятся центр Луны и центр Земли (ЛЗ) и центр Луны и центр Солнца (ЛС)? Все необходимые данные о размерах тел и расстояниях между ними отыщите самостоятельно.

Решение

Видимые с Земли угловые размеры Солнца и Луны почти совпадают и равны примерно $\alpha=0,5^\circ$. Угловой размер Земли при наблюдении с Луны равен примерно $\beta = 2 \times 6,4 / 382 \approx 1,92^\circ$.

Лучи Солнца от его края проходят по касательной к поверхности Луны в тех точках, которые видны с Земли на терминаторе, причем соответствующая точка в центре видимого диска Луны и наблюдатель на Земле находятся на одной Лунной вертикали. В

результате угол СЛЗ больше прямого угла на сумму половинки угла видимого размера Солнца и половинки углового размера видимой с Луны Земли:
угол СЛЗ $\approx 90^\circ + 0,25^\circ + 0,96^\circ = 91,2^\circ$.

9 класс

Задача 1

Задача предложена АГ СПбГУ

1. Из проводящего вещества сделали куб и измерили сопротивление между двумя углами. Затем из того же вещества сделали куб в 2 раза меньшего размера и измерили сопротивление между аналогичными углами. Сопротивление оказалось (выбрать один ответ):

- а) в 2 раза меньше,
- б) в 2 раза больше,
- в) тем же самым,
- г) ответ зависит от того, какую пару углов взять для измерений.

Решение

Очевидно, что сопротивление должно быть пропорциональным удельному сопротивлению вещества. Чтобы получить правильную размерность сопротивления (Ом) удельное сопротивление необходимо разделить на некоторую величину с размерностью длины. Для куба единственной такой величиной является длина ребра, которую обозначим через a . Таким образом, из соображений размерности получаем, что сопротивление равно:

$$R = C \frac{\rho}{a},$$

Ответ: б)

где безразмерная константа C зависит от того, какую пару углов мы выбираем. Если для измерения сопротивления куба с ребром $a/2$ мы выбираем аналогичную пару углов, то константа C не изменяется, и, следовательно, сопротивление увеличивается в 2 раза.

Задача 2

Задача предложена АГ СПбГУ

При помощи собирающей линзы получено изображение объекта равное по величине объекту. При этом расстояние между объектом и изображением равно L . Требуется сдвинуть объект относительно линзы так, чтобы расстояние между объектом и изображением увеличилось. Это возможно (выбрать один ответ):

- а) только если увеличить расстояние между объектом и линзой,
- б) только если уменьшить расстояние между объектом и линзой,
- в) как при уменьшении, так и при увеличении расстояния между объектом и линзой,
- г) не возможно никогда.

Решение

Решение задачи можно получить, зная формулу, связывающую расстояние от объекта до линзы с расстоянием от изображения до линзы. Однако, поскольку в основной школе эта формула не дается, можно обойтись без этого. Из правила построения изображения в линзе учащимся известно, что размеры объекта и изображения равны только когда предмет и изображение находятся на расстояниях $2F$ от линзы, где F - фокусное расстояние. Построением несложно проверить, что удаляя объект от линзы, мы приближаем к ней изображение и наоборот. Используя свойство обратимости хода лучей

(или правило построения изображения), несложно понять, что ответы а) и б) не верны. В том, что не верен ответ г) не сложно убедиться, удаляя объект на большое расстояние от линзы. При этом изображение приближается к фокусу, и расстояние между объектом и изображением становится большим $2F$.

Задача 3

Задача предложена Александром Рафаиловичем Зильберманом.

На кухне в школе имеется сосуд кубической формы, который разделен перегородками одинаковой толщины на три отсека. Перегородки при рассмотривании сверху составляют букву «Т». Объемы двух отсеков одинаковы и равны $\frac{1}{4}$ части объема всего сосуда, а объем третьего отсека равен $\frac{1}{2}$ объема сосуда. Площади перегородок, отделяющих каждый отсек от любого соседнего отсека, одинаковы. Внешние стенки, дно и крышка сосуда снаружи покрыты очень плохо проводящими тепло материалами. В отсеки этого сосуда налили жидкости разной температуры до одного и того же уровня. В самый большой по объему отсек налит суп с начальной температурой 60°C . В одном из малых отсеков – чай с начальной температурой 90° , а во втором малом отсеке – компот с начальной температурой 40°C . Через две минуты после того, как жидкости были залиты, температура чая стала равной 87°C . Какими в этот момент были температуры супа и компота? Теплоемкостями стенок и перегородок можно пренебречь в сравнении с теплоемкостями жидкостей.

Решение

Скорость передачи теплоты через перегородки пропорциональна разности температур, причем эти разности температур изменяются мало, поэтому можно считать, что они постоянны. Поскольку все свойства перегородок одинаковы (площади, толщины, материалы), то количество теплоты переданной чаем пропорционально сумме $[(90^\circ-60^\circ)+(90^\circ-40^\circ)]$. Количество теплоты, полученной супом, пропорционально величине $[(90^\circ-60^\circ)-(60^\circ-40^\circ)]$. А количество теплоты, полученной компотом, пропорционально $[(90^\circ-40^\circ)+(60^\circ-40^\circ)]$. Теплоемкость супа в два раза больше теплоемкости чая и компота, поэтому суп нагреется примерно на $(3^\circ/2)\times 50/80\approx 0,94^\circ$. А компот нагреется примерно на $(3^\circ)\times 70/80\approx 2,6^\circ$.

Задача 4

Задача предложена Сергеем Дмитриевичем Варламовым.

Археолог, откопавший скелет динозавра, определил его возраст: 100 миллионов лет и оценил массу динозавра, когда он был жив, в 10 тонн. Оцените количество молекул воды в вашем организме, которые когда-то находились в теле этого животного.

Решение

Тела всех наземных животных примерно на 80% состоят из воды. В теле динозавра было $M=8$ тонн воды, в 70 кг массы тела человека (примерная масса участника олимпиады) содержится около $m=55$ кг воды. Количество воды на Земле за сотню миллионов лет не изменилось. Если считать, что за этот срок вода основательно «перемешалась» и равномерно распределилась всюду (в океане, морях, озерах), то молекулы воды, содержащиеся в 8 тоннах, равномерно распределены во всех водоемах. Если принять, что вся Земля покрыта одним и тем же слоем воды около $H=3,5$ км (3,7 км – средняя глубина океана), то концентрация «динозавровых» молекул равна примерно:

$$n = (M \times A / \mu) / (H \times 4\pi R_{\text{Земли}}^2) = 1,5 \times 10^{11} \text{ м}^{-3} = 150 \text{ млрд/м}^3.$$

Здесь A – число Авогадро, μ – молярная масса воды. Следовательно в каждом из нас в среднем находится около $n \times 0,055 \text{ м}^3 = 8$ млрд «динозавровых» молекул.

Задача 5

Задача предложена Сергеем Дмитриевичем Варламовым.

Средний срок службы ламп накаливания 100 Вт/220В и люминесцентных ламп с одинаковой «производительностью по свету» примерно одинаков – около 2000 часов. Эффективность ламп накаливания в 5 раз меньше, чем у люминесцентных. Стоимости этих ламп отличаются в 15 раз: 10 руб и 150 руб за штуку (люминесцентные дороже). При какой стоимости 1 кВт×час электроэнергии выгодно покупать и использовать более дорогие лампы?

Решение

Выгодно покупать и использовать люминесцентные лампы только при выполнении неравенства:

$$150 + 0,1 \times 2000 \times X / 5 < 10 + 0,1 \times 2000 \times X$$

Где X – это цена одного кВт×часа электроэнергии. Отсюда $X > 0,875$ руб/кВт.

Задача 6

Задача предложена Сергеем Дмитриевичем Варламовым.

В полдень 21 марта с экватора Земли Луна видна освещенной ровно наполовину. Каков угол между отрезками ЛЗ и ЛС, на концах которых находятся центр Луны и центр Земли (ЛЗ) и центр Луны и центр Солнца (ЛС)? Все необходимые данные о размерах тел и расстояниях между ними отыщите самостоятельно.

Решение

Видимые с Земли угловые размеры Солнца и Луны почти совпадают и равны примерно $\alpha = 0,5^\circ$. Угловой размер Земли при наблюдении с Луны равен примерно $\beta = 2 \times 6,4 / 382 \approx 1,92^\circ$.

Лучи Солнца от его края проходят по касательной к поверхности Луны в тех точках, которые видны с Земли на терминаторе, причем соответствующая точка в центре видимого диска Луны и наблюдатель на Земле находятся на одной Лунной вертикали. В результате угол СЛЗ больше прямого угла на сумму половинки угла видимого размера Солнца и половинки углового размера видимой с Луны Земли:

$$\text{угол СЛЗ} \approx 90^\circ + 0,25^\circ + 0,96^\circ = 91,2^\circ.$$

10 класс

Задача 1

Задача предложена АГ СПбГУ

Из пушки стреляют по вертикальной стене, изменяя наклон ствола и сохраняя начальную скорость ядра. При углах α_1 и α_2 наклона ствола относительно горизонта снаряд попал в стену на высоте H . Если выстрелить под углом α , таким что $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$, то в пренебрежении сопротивлением воздуха (выбрать один ответ):

- высота попадания снаряда увеличится,
- высота попадания снаряда уменьшится,
- результат зависит от значения угла α ,
- результат зависит как от значения угла α , так и от других параметров задачи.

Решение

Для решения задачи проще всего воспользоваться уравнением траектории движения ядра. Если выбрать оси координат так, что ядро вылетает из начала координат и ось y направлена вверх, то уравнение траектории имеет вид:

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2} (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha).$$

Таким образом, высота (значение y) является квадратичной функцией от $\operatorname{tg} \alpha$ (см. рис.2).

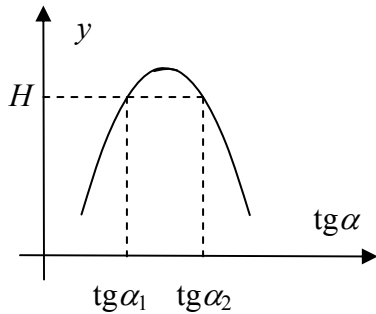


Рис.2.

Если при двух различных значениях α , а следовательно и при двух различных значениях $\operatorname{tg} \alpha$ ядро попало на одну и ту же высоту, то, как следует из графика, при промежуточном значении $\operatorname{tg} \alpha$ ядро попадет в точку на большей высоте. Поскольку в интервале $[0, \pi/2]$ $\operatorname{tg} \alpha$ является монотонно возрастающей функцией, то при $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$ ядро попадет в точку на большей высоте.

Ответ: а)

Задача 2

Задача предложена АГ СПбГУ

Два шара радиусами R и $4R$ сбрасывают с высоты настолько большой, что в течение времени малого по отношению ко времени падения в силу сопротивления воздуха их скорости становятся постоянными. При этом сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости шара. Найти отношение времен падения шаров: $t(R)/t(4R)$.

Решение

Для решения задачи можно использовать соображения размерности, в соответствии с которыми при квадратичной зависимости силы сопротивления от скорости значение силы определяется выражением:

$$F = C_1 v^2 \rho S,$$

где C_1 — некоторая константа, ρ — плотность воздуха, S — площадь поперечного сечения тела (см. Е.И.Бутиков, А.А.Быков, А.С.Кондратьев. Физика для поступающих в вузы.) Таким образом, для шара:

$$F = C v^2 \rho R^2.$$

При равномерном падении эта сила уравновешена силой тяжести, равной:

$$F_T = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho_0,$$

где ρ_0 — плотность шара. В результате получим:

$$v = C_2 \sqrt{R},$$

где константа C_2 выражается через плотности и численные константы.

Время падения при постоянной скорости падения обратно пропорционально скорости. Таким образом:

$$t = \frac{C_3}{\sqrt{R}}.$$

В результате получаем ответ: $t(R)/t(4R)=2$.

Ответ: $t(R)/t(4R)=2$.

Задача 3

Задача предложена Александром Рафаиловичем Зильберманом.

На кухне в школе имеется сосуд кубической формы, который разделен перегородками одинаковой толщины на три отсека. Перегородки при рассмотрении сверху составляют букву «Т». Объемы двух отсеков одинаковы и равны $\frac{1}{4}$ части объема всего сосуда, а объем третьего отсека равен $\frac{1}{2}$ объема сосуда. Площади перегородок, отделяющих каждый отсек от любого соседнего отсека, одинаковы. Внешние стенки, дно и крышка сосуда снаружи покрыты очень плохо проводящими тепло материалами. В отсеки этого сосуда налили жидкости разной температуры до одного и того же уровня. В самый большой по объему отсек налит суп с начальной температурой 60°C . В одном из малых отсеков – чай с начальной температурой 90° , а во втором малом отсеке – компот с начальной температурой 40°C . Через две минуты после того, как жидкости были залиты, температура чая стала равной 87°C . Какими в этот момент были температуры супа и компота? Теплоемкостями стенок и перегородок можно пренебречь в сравнении с теплоемкостями жидкостей.

Решение

Скорость передачи теплоты через перегородки пропорциональна разности температур, причем эти разности температур изменяются мало, поэтому можно считать, что они постоянны. Поскольку все свойства перегородок одинаковы (площади, толщины, материалы), то количество теплоты переданной чаем пропорционально сумме $[(90^\circ-60^\circ)+(90^\circ-40^\circ)]$. Количество теплоты, полученной супом, пропорционально величине $[(90^\circ-60^\circ)-(60^\circ-40^\circ)]$. А количество теплоты, полученной компотом, пропорционально $[(90^\circ-40^\circ)+(60^\circ-40^\circ)]$. Теплоемкость супа в два раза больше теплоемкости чая и компота, поэтому суп нагреется примерно на $(3^\circ/2) \times 50/80 \approx 0,94^\circ$. А компот нагреется примерно на $(3^\circ) \times 70/80 \approx 2,6^\circ$.

Задача 4

Задача предложена Сергеем Дмитриевичем Варламовым.

Археолог, откопавший скелет динозавра, определил его возраст: 100 миллионов лет и оценил массу динозавра, когда он был жив, в 10 тонн. Оцените количество молекул воды в вашем организме, которые когда-то находились в теле этого животного.

Решение

Тела всех наземных животных примерно на 80% состоят из воды. В теле динозавра было $M=8$ тонн воды, в 70 кг массы тела человека (примерная масса участника олимпиады) содержится около $m=55$ кг воды. Количество воды на Земле за сотню миллионов лет не изменилось. Если считать, что за этот срок вода основательно «перемешалась» и равномерно распределилась всюду (в океане, морях, озерах), то молекулы воды, содержащиеся в 8 тоннах, равномерно распределены во всех водоемах. Если принять, что вся Земля покрыта одним и тем же слоем воды около $H=3,5$ км (3,7 км – средняя глубина океана), то концентрация «динозавровых» молекул равна примерно:

$$n = (M \times A / \mu) / (H \times 4\pi R_{\text{Земли}}^2) = 1,5 \times 10^{11} \text{ м}^{-3} = 150 \text{ млрд/м}^3.$$

Здесь A – число Авогадро, μ – молярная масса воды. Следовательно в каждом из нас в среднем находится около $n \times 0,055 \text{ м}^3 = 8$ млрд «динозавровых» молекул.

Задача 5

Задача предложена Сергеем Дмитриевичем Варламовым.

Средний срок службы ламп накаливания 100 Вт/220В и люминесцентных ламп с одинаковой «производительностью по свету» примерно одинаков – около 2000 часов. Эффективность ламп накаливания в 5 раз меньше, чем у люминесцентных. Стоимости этих ламп отличаются в 15 раз: 10 руб и 150 руб за штуку (люминесцентные дороже). При какой стоимости 1 кВт×час электроэнергии выгодно покупать и использовать более дорогие лампы?

Решение

Выгодно покупать и использовать люминесцентные лампы только при выполнении неравенства:

$$150 + 0,1 \times 2000 \times X / 5 < 10 + 0,1 \times 2000 \times X$$

Где X – это цена одного кВт×часа электроэнергии. Отсюда $X > 0,875$ руб/кВт.

Задача 6

Задача предложена Сергеем Дмитриевичем Варламовым.

В полдень 21 марта с экватора Земли Луна видна освещенной ровно наполовину. Каков угол между отрезками ЛЗ и ЛС, на концах которых находятся центр Луны и центр Земли (ЛЗ) и центр Луны и центр Солнца (ЛС)? Все необходимые данные о размерах тел и расстояниях между ними отыщите самостоятельно.

Решение

Видимые с Земли угловые размеры Солнца и Луны почти совпадают и равны примерно $\alpha = 0,5^\circ$. Угловой размер Земли при наблюдении с Луны равен примерно $\beta = 2 \times 6,4 / 382 \approx 1,92^\circ$.

Лучи Солнца от его края проходят по касательной к поверхности Луны в тех точках, которые видны с Земли на терминаторе, причем соответствующая точка в центре видимого диска Луны и наблюдатель на Земле находятся на одной Лунной вертикали. В результате угол СЛЗ больше прямого угла на сумму половинки угла видимого размера Солнца и половинки углового размера видимой с Луны Земли:
угол СЛЗ $\approx 90^\circ + 0,25^\circ + 0,96^\circ = 91,2^\circ$.

МАТЕМАТИКА

8 класс

Задача 1

Задача предложена Шаричем В., ассистентом кафедры математики СУНЦ МГУ.

Все натуральные числа разбили на группы следующим образом: {1}, {2,3}, {4,5,6}, {7,8,9,10}, ... Какова сумма чисел в десятой группе?

Ответ: 505.

Решение.

n -тая группа начинается с числа $\frac{n(n-1)}{2} + 1$ и представляет арифметическую прогрессию с шагом 1, содержащую n элементов. Значит, сумма чисел в ней равна $\frac{n}{2}(n^2 + 1)$. Теперь положим $n=10$.

Задача 2

Задача предложена Шаричем В., ассистентом кафедры математики СУНЦ МГУ.

Вершины треугольника расположены в точках (1,1), (2,6), (13,6). Найдите радиус наименьшего круга, содержащего этот треугольник.

Ответ: 6,5.

Решение.

Поскольку треугольник тупоугольный, диаметром такого круга служит самая длинная сторона треугольника. В данном случае самая длинная сторона равна 13, а радиус равен $\frac{13}{2} = 6,5$.

Задача 3

Задача предложена Шаричем В., ассистентом кафедры математики СУНЦ МГУ.

При каком наибольшем натуральном n число $n^2 + 2009$ является квадратом натурального числа?

Ответ: 1004.

Решение.

Начиная с $n = 1005$ расстояние между квадратами больше 2009. Значит, n не превосходит 1004. Но $1004^2 + 2009 = 1004^2 + 2 \cdot 1004 + 1 = (1004 + 1)^2 = 1005^2$, а значит, 1004 подходит.

Задача 4

Задача предложена Шаричем В., ассистентом кафедры математики СУНЦ МГУ.

На полке стоит в ряд 12 книг. Сколькими способами можно выбрать шесть из них так, чтобы никакие две из выбранных не стояли рядом?

Ответ: 7.

Решение.

Представим, что, выбирая книгу, для всех кроме самой правой, проделываем следующее: отмечаем стоящую справа от нее. Таким образом, отмеченными оказываются 5 книг, а выбираем из 7. Эта конструкция позволяет свести задачу к такой: выбрать произвольным образом 6 книг из 7. Это можно сделать 7 способами.

Задача 5

Задача предложена Шаричем В., ассистентом кафедры математики СУНЦ МГУ.

Функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такова, что при всех $x \in \mathbb{R}$ справедливо $2f(x) + f(-x) = 2x - 3$.
Найдите формулу для $f(x)$.

Ответ: $f(x) = 2x - 1$.

Решение. Подставим в исходное уравнение $-x$ вместо x . Получим $2f(-x) + f(x) = -2x - 3$. Из двух соотношений можно, исключив $f(-x)$, получить $f(x) = 2x - 1$.

Задача 6

Задача предложена Шаричем В., ассистентом кафедры математики СУНЦ МГУ.

Сколько целых чисел удовлетворяет неравенству $||x| - 1| \leq 2009$? (Целые числа - это 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, ...)

Ответ: 4021.

Решение.

$||x| - 1| \leq 2009$ равносильно тому, что $-2009 \leq |x| - 1 \leq 2009$, т.е. $|x| \leq 2010$. Таких чисел $2 \cdot 2010 + 1$.

9 класс

Задача 1

Задача предложена Шаричем В., ассистентом кафедры математики СУНЦ МГУ.

Все натуральные числа разбили на группы следующим образом: $\{1\}$, $\{2,3\}$, $\{4,5,6\}$, $\{7,8,9,10\}$, ... Какова сумма чисел в n -той группе?

Ответ: $\frac{n}{2}(n^2 + 1)$.

Решение. n -тая группа начинается с числа $\frac{n(n-1)}{2} + 1$ и представляет арифметическую прогрессию с шагом 1, содержащую n элементов. Значит, сумма чисел в ней равна $\frac{n}{2}(n^2 + 1)$.

Задача 2

Задача предложена Шаричем В., ассистентом кафедры математики СУНЦ МГУ.

Вершины треугольника расположены в точках (1,1), (2,6), (13,6). Найдите радиус наименьшего круга, содержащего этот треугольник.

Ответ: 6,5.

Решение. Поскольку треугольник тупоугольный, диаметром такого круга служит самая длинная сторона треугольника. В данном случае самая длинная сторона равна 13, а радиус, следовательно, $\frac{13}{2} = 6,5$.

Задача 3

Задача предложена Шаричем В., ассистентом кафедры математики СУНЦ МГУ.

При каком наибольшем натуральном n число $n^2 + 2009n$ является квадратом натурального числа?

Ответ: 1008016.

Решение. Пусть $n^2 + 2009n = (n + k)^2$. Выразим $n, n = \frac{k^2}{2009 - 2k}$. Ясно, что k должно быть как можно больше. В то же время, $2k < 2009$. Значит, наибольшее значение k равно 1004, а $n = 1004^2$.

Задача 4

Задача предложена Шаричем В., ассистентом кафедры математики СУНЦ МГУ.

На полке стоит в ряд 15 книг. Сколькими способами можно выбрать шесть из них так, чтобы никакие две из выбранных не стояли рядом?

Ответ: 210.

Решение. Представим, что, выбирая книгу, для всех кроме самой правой, проделываем следующее: отмечаем стоящую справа от нее. Таким образом, отмеченными оказываются 5 книг, а выбираем из 10. Эта конструкция позволяет свести задачу к такой: выбрать произвольным образом 6 книг из 10. Это можно сделать $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 / 4! = 210$ способами.

Задача 5

Задача предложена Шаричем В., ассистентом кафедры математики СУНЦ МГУ.

Функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такова, что при всех $x \in \mathbb{R}$ справедливо $2f(x) + f(-x) = 2x - 3$. Найдите формулу для $f(x)$.

Ответ: $f(x) = 2x - 1$.

Решение. Подставим в исходное уравнение $-x$ вместо x . Получим $2f(-x) + f(x) = -2x - 3$. Из двух соотношений можно, исключив $f(-x)$, получить $f(x) = 2x - 1$.

Задача 6

Задача предложена Шаричем В., ассистентом кафедры математики СУНЦ МГУ.

На сторонах АВ и CD квадрата ABCD со стороной 3 отмечены точки Р и R такие, что $AP:PB=1:2=CR:RD$. Пусть S - точка пересечения AR и DP, Q - точка пересечения BR и CP. Какова площадь четырехугольника PQRS?

Ответ: 2.

Решение. Очевидно, что треугольники APS и ABR подобны с коэффициентом $1/3$; площадь ABR равна половине площади квадрата. Значит, площадь APS равна $1/2$; аналогично площадь CQR равна $1/2$. Площади треугольников DRA и BPC равны 3. Следовательно, площадь PQRS равна $9-3-3-1=2$.

10 класс

Задача 1

Задача предложена Шаричем В., ассистентом кафедры математики СУНЦ МГУ.

Все нечетные натуральные числа, большие 1, разбили на группы следующим образом: $\{3\}$, $\{5,7\}$, $\{9,11,13\}$, $\{15,17,19,21\}$, ... Какова сумма чисел в n -той группе?

Ответ: $(n^2 + 2)n$.

Решение. n -тая группа начинается с числа $n(n-1)+3$ и представляет арифметическую прогрессию с шагом 2, содержащую n элементов. Значит, сумма чисел в ней равна $(n^2 + 2)n$.

Задача 2

Задача предложена Шаричем В., ассистентом кафедры математики СУНЦ МГУ.

Вершины треугольника расположены в точках с координатами (2,1), (3,4), (11,4). Найдите площадь наименьшего прямоугольника, содержащего этот треугольник.

Ответ: $S=24$.

Решение. С одной стороны, прямоугольник, внутри которого находится треугольник площади S , имеет площадь не меньшую, чем $2S$.

(Это можно доказать в два этапа, при каждом из которых отношение площади треугольника к площади прямоугольника не убывает:

1) сужаем прямоугольник до того момента, когда три вершины треугольника попадают на границу прямоугольника;

2) двигаем вершины треугольника по границе прямоугольника, чтобы максимально увеличить треугольник относительно прямоугольника.

После этих перекроек площадь треугольника будет в точности равна половине площади прямоугольника.)

С другой стороны, легко построить прямоугольник, площадь которого равно $2S$.

Пусть $A(2,1)$, $B(3,4)$, $C(11,4)$; тогда площадь треугольника ABC равна 12. А ответ в 2 раза больше.

Задача 3

Задача предложена Шаричем В., ассистентом кафедры математики СУНЦ МГУ.

При каком наибольшем натуральном n число $n^2 + 2009n$ является квадратом натурального числа?

Ответ: 1008016.

Решение. Пусть $n^2 + 2009n = (n + k)^2$. Выразим $n, n = \frac{k^2}{2009 - 2k}$. Ясно, что k должно быть как можно больше. В то же время, $2k < 2009$. Значит, наибольшее значение k равно 1004, а $n = 1004^2$.

Задача 4

Задача предложена Шаричем В., ассистентом кафедры математики СУНЦ МГУ.

На полке стоит в ряд 15 книг. Сколькими способами можно выбрать шесть из них так, чтобы никакие две из выбранных не стояли рядом?

Ответ: 210.

Решение. Представим, что, выбирая книгу, для всех кроме самой правой, проделываем следующее: отмечаем стоящую справа от нее. Таким образом, отмеченными оказываются 5 книг, а выбираем из 10. Эта конструкция позволяет свести задачу к такой: выбрать произвольным образом 6 книг из 10. Это можно сделать $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 / 6! = 210$ способами.

Задача 5

Задача предложена Шаричем В., ассистентом кафедры математики СУНЦ МГУ.

Функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такова, что при всех $x \in \mathbb{R}$ справедливо $2f(x) + f(-x) = 2x - 3$.
Найдите формулу для $f(x)$.

Ответ: $f(x) = 2x - 1$.

Решение. Подставим в исходное уравнение $-x$ вместо x . Получим $2f(-x) + f(x) = -2x - 3$. Из двух соотношений можно, исключив $f(-x)$, получить $f(x) = 2x - 1$.

Задача 6

Задача предложена Шаричем В., ассистентом кафедры математики СУНЦ МГУ.

Как известно, основанием высоты, опущенной из вершины A на сторону BC треугольника ABC называется точка P прямой BC , для которой AP перпендикулярно BC .

Аналогично определяются основание Q высоты из B на CA , основание R высоты из C на AB .

Треугольник PQR называется ортотреугольником треугольника ABC .

Известно, что два из трех углов ортотреугольника равны 41 и 61 градусов. Найдите наибольшую возможную градусную меру наибольшего из углов исходного треугольника.

Ответ: 129.

Решение. Любой треугольник PQR является ортотреугольником для любых трех из четырех точек, образующих *ортоцентрическую четверку*. Для PQR эти точки являются центрами вписанной и внеписанных окружностей. Обозначим их за A, B, C, D , причем так, чтобы D было центром вписанной окружности треугольника PQR .

Таким образом, PQR является ортотреугольником следующих треугольников: ABC, ABD, BCD, CAD .

Углы ABC равны полусуммам углов PQR , т.е. $51; 59,5; 69,5$ градусов. Углы же при вершине D дополняют указанные до 180 градусов, а значит, равны соответственно $129; 120,5; 110,5$ градусов. Все указанные углы (и некоторые еще меньшие, будучи частями углов ABC) могут служить внутренними углами треугольника с ортотреугольником PQR .

Но наибольший из всех имеет градусную меру 129 .

ХИМИЯ

8 класс

Задача 1

Задача предложена АГ СПбГУ

Какой минимальный объем воздуха (н.у.) требуется для превращения 1,92 г молибдена в высший оксид этого элемента?

Ответ: 3,2 л.

Решение.

Рассмотрим реакцию $2\text{Mo} + 3\text{O}_2 = 2\text{MoO}_3$

В реакцию вступило $1,92/96 = 0,02$ моль металла. Следовательно, с ним прореагировало $0,02 \cdot 2 \cdot 3 = 0,03$ моль кислорода, которые при н.у. занимают объем $0,03 \cdot 22,4 = 0,672$ л

Поскольку объемная доля кислорода в воздухе составляет 21%, соответствующий объем воздуха составит 3,2 л.

Задача 2

Задача предложена АГ СПбГУ

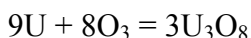
Сумма коэффициентов в реакции взаимодействия озона с ураном с образованием урановой смолки (соединения, содержащего два атома урана с валентностью шесть и один – с валентностью четыре) составляет:

А) 8; Б) 12; В) 16; Г) 20

Все коэффициенты в уравнении реакции следует брать целочисленными.

Ответ: Г

Решение.



Задача 3

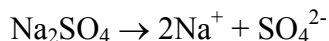
Задача предложена Натальей Игоревной Морозовой, старшим преподавателем

СУНЦ МГУ

Сколько разных видов ионов с концентрацией более 0,001 моль/л присутствует в растворе, содержащем в литре 1 моль Na_2SO_4 ?

1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4.

Решение



В растворе 2 вида ионов: ионы натрия (с концентрацией 2 моль/л) и сульфат-ионы (с концентрацией 1 моль/л).

Кроме них, в водном растворе находятся ионы H^+ и OH^- , образующиеся при обратимой диссоциации воды, но их концентрации гораздо меньше 0,001 моль/л (а именно 10^{-7} моль/л), т.к. вода - очень слабый электролит.

Ответ: 2) 2.

Задача 4

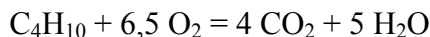
Задача предложена Натальей Игоревной Морозовой, старшим преподавателем

СУНЦ МГУ

Газовая зажигалка содержит 5,8 г сжиженного газа – бутана, имеющего формулу C_4H_{10} .

- 1) Сколько л воздуха (при н.у.) необходимо для полного сгорания всего газа из зажигалки?
- 2) Какая минимальная масса 4%-ного раствора гидроксида натрия достаточна для реакции с продуктами сгорания?
- 3) Определите массовую долю вещества в растворе, полученном после реакции, описанной в п.2.

Решение



1)

Найдем количество бутана:

$$n(\text{C}_4\text{H}_{10}) = m(\text{C}_4\text{H}_{10}) : M(\text{C}_4\text{H}_{10}) = 5,8 \text{ г} : 58 \text{ г/моль} = 0,1 \text{ моль.}$$

Количество кислорода больше в 6,5 раз:

$$n(\text{O}_2) = 6,5n(\text{C}_4\text{H}_{10}) = 6,5 \cdot 0,1 \text{ моль} = 0,65 \text{ моль.}$$

Найдем объем кислорода:

$$V(\text{O}_2) = n(\text{O}_2) \cdot V_m = 0,65 \text{ моль} \cdot 22,4 \text{ л/моль} = 14,56 \text{ л.}$$

В воздухе примерно 20% кислорода (1/5), значит, объем воздуха должен быть в 5 раз больше:

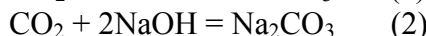
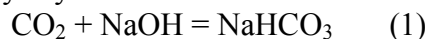
$$V(\text{возд}) = 5V(\text{O}_2) = 5 \cdot 14,56 \text{ л} = 72,8 \text{ л.}$$

(При расчете с учетом точного содержания кислорода в воздухе 20,95% объем воздуха равен:

$$V(\text{возд}) = V(\text{O}_2) : \chi(\text{O}_2) = 14,56 \text{ л} : 0,2095 = 69,5 \text{ л.}$$

2)

С гидроксидом натрия реагирует углекислый газ. Возможные уравнения:



Поскольку в условии требуется найти минимальную массу гидроксида натрия, то расчет ведем по 1-му уравнению.

Найдем количество CO_2 :

$$n(\text{CO}_2) = 4n(\text{C}_4\text{H}_{10}) = 4 \cdot 0,1 \text{ моль} = 0,4 \text{ моль.}$$

Количество гидроксида натрия равно количеству углекислого газа:

$$n(\text{NaOH}) = n(\text{CO}_2) = 0,4 \text{ моль.}$$

Найдем массу гидроксида натрия:

$$m(\text{NaOH}) = n(\text{NaOH}) \cdot M(\text{NaOH}) = 0,4 \text{ моль} \cdot 40 \text{ г/моль} = 16 \text{ г.}$$

Найдем массу 4%-ного раствора гидроксида натрия:

$$m(\text{р-ра NaOH}) = m(\text{NaOH}) : \omega(\text{NaOH}) = 16 \text{ г} : 0,04 = 400 \text{ г.}$$

3)

Вещество в растворе после реакции - NaHCO_3 . Найдем его количество и массу:

$$n(\text{NaHCO}_3) = n(\text{NaOH}) = 0,4 \text{ моль.}$$

$$m(\text{NaHCO}_3) = n(\text{NaHCO}_3) \cdot M(\text{NaHCO}_3) = 0,4 \text{ моль} \cdot 84 \text{ г/моль} = 33,6 \text{ г.}$$

Выразим массу раствора:

$$m(\text{р-ра NaHCO}_3) = m(\text{р-ра NaOH}) + m(\text{CO}_2) + m(\text{H}_2\text{O}).$$

Найдем массы продуктов сгорания бутана:

$$m(\text{CO}_2) = n(\text{CO}_2) \cdot M(\text{CO}_2) = 0,4 \text{ моль} \cdot 44 \text{ г/моль} = 17,6 \text{ г.}$$

$$m(\text{H}_2\text{O}) = n(\text{H}_2\text{O}) \cdot M(\text{H}_2\text{O}) = 5n(\text{C}_4\text{H}_{10}) \cdot M(\text{H}_2\text{O}) = 5 \cdot 0,1 \text{ моль} \cdot 18 \text{ г/моль} = 9 \text{ г.}$$

Найдем массу раствора:

$$m(\text{р-ра NaHCO}_3) = 400 + 17,6 + 9 = 426,6 \text{ г.}$$

Найдем массовую долю гидрокарбоната натрия в растворе:

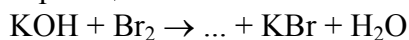
$$\omega(\text{NaHCO}_3) = m(\text{NaHCO}_3) : m(\text{р-ра NaHCO}_3) = 33,6 : 426,6 = 0,07876 \text{ или } 7,876\%.$$

Ответ: 1) 71 л; 2) 400 г; 3) 7,9%

Задача 5

Задача предложена Натальей Игоревной Морозовой, старшим преподавателем СУНЦ МГУ

Укажите возможные продукты в реакции:



1) HBr; 2) KBrO; 3) Br₂O₇; 4) KH; 5) KBrO₃.

Решение

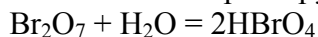
Поскольку в результате реакции из Br₂ (Br⁰) образуется KBr (Br⁻¹), то реакция – окислительно-восстановительная. Бром уменьшил степень окисления, значит, какой-то из атомов должен ее увеличить.

До реакции степени окисления были: K⁺¹, O⁻², H⁺¹, Br⁰

1) HBr H⁺¹, Br⁻¹ не подходит

2) KBrO K⁺¹, Br⁺¹, O⁻² подходит

3) Br₂O₇ Br⁺⁷, O⁻² формально подходит, но одновременное присутствие в продуктах воды и оксида брома невозможно: они реагируют между собой:



4) KH K⁺¹, H⁻¹ не подходит

5) KBrO₃ K⁺¹, Br⁺⁵, O⁻² подходит

Ответы: 2) KBrO; 5) KBrO₃.

Задача 6

Задача предложена Натальей Игоревной Морозовой, старшим преподавателем СУНЦ МГУ

Массовая доля кислорода в нитрате двухвалентного металла равна 58,54%. Запишите название этого металла.

Решение

Общая формула нитрата двухвалентного металла: M(NO₃)₂. Выразим массовую долю кислорода в этом нитрате через молярные массы:

$$\omega(\text{O}) = \frac{6M(\text{O})}{M(\text{M}) + 2M(\text{N}) + 6M(\text{O})} = \frac{6 \cdot 16}{M + 2 \cdot 14 + 6 \cdot 16} = \frac{96}{M + 124}.$$

По условию

$$\omega(\text{O}) = 0,5854.$$

Тогда

$$\frac{96}{M + 124} = 0,5854.$$

Отсюда

$$M = 40 \text{ г/моль.}$$

Это молярная масса кальция.

Ответ: кальций.

9 класс

Задача 1

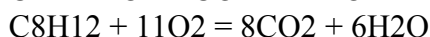
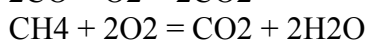
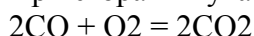
Задача предложена АГ СПбГУ

При полном сгорании 10 л смеси угарного газа, метана (CH₄) и паров циклооктадиена (C₈H₁₂) образовалось 24 л углекислого газа. Определите мольную долю циклооктадиена в смеси, если известно, что объемы газов измерялись при одинаковых условиях.

А) 20%; б) 50%; В) 40%; Г) 60%

Решение

При сгорании указанных газов протекают реакции:



Таким образом, если в реакцию вступило a моль CO , b моль CH_4 и c моль C_8H_{12} , то получится $a + b + 8c$ моль CO_2 .

Поскольку (по следствию из закона Авогадро) при одинаковых условиях молярные отношения газов равны объемным отношениям, получаем:

$$a + b + c = 10$$

$$a + b + 8c = 24$$

$$\text{Откуда } c = 2.$$

Следовательно, молярная доля циклооктадиена 20%.

Ответ: А

Задача 2

Задача предложена АГ СПбГУ

В реакции, механизм которой описывается схемой $2\text{A}(\text{г}) + \text{B}(\text{г}) = \text{C}(\text{г}) + \text{D}(\text{г})$ концентрацию вещества А увеличили в 2 раза, вещества В – в 3 раза, вещества С – в 2 раза, вещества D – в 3 раза. Скорость реакции при этом возросла:

А) в 12 раз;

Б) в 6 раз;

В) в 2 раза;

Г) в 1.5 раза.

Решение

Кинетическое уравнение данной реакции представлено ниже:

$$v = [\text{A}]^2 \cdot [\text{B}]$$

Тогда при увеличении концентраций исходных веществ скорость реакции возрастет в $2 \cdot 3$, то есть, в 12 раз.

Ответ: А.

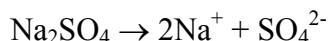
Задача 3

Задача предложена Натальей Игоревной Морозовой, старшим преподавателем СУНЦ МГУ

Сколько разных видов ионов с концентрацией более 0,001 моль/л присутствует в растворе, содержащем в литре 1 моль Na_2SO_4 ?

1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4.

Решение



В растворе 2 вида ионов: ионы натрия (с концентрацией 2 моль/л) и сульфат-ионы (с концентрацией 1 моль/л).

Кроме них, в водном растворе находятся ионы H^+ и OH^- , образующиеся при обратимой диссоциации воды, но их концентрации гораздо меньше 0,001 моль/л (а именно 10^{-7} моль/л), т.к. вода - очень слабый электролит.

Ответ: 2) 2.

Задача 4

Задача предложена Натальей Игоревной Морозовой, старшим преподавателем СУНЦ МГУ

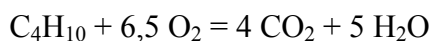
Газовая зажигалка содержит 5,8 г сжиженного газа – бутана, имеющего формулу C_4H_{10} .

1) Сколько л воздуха (при н.у.) необходимо для полного сгорания всего газа из зажигалки?

2) Какая минимальная масса 4%-ного раствора гидроксида натрия достаточна для реакции с продуктами сгорания?

3) Определите массовую долю вещества в растворе, полученном после реакции, описанной в п.2.

Решение



1)

Найдем количество бутана:

$$n(C_4H_{10}) = m(C_4H_{10}) : M(C_4H_{10}) = 5,8 \text{ г} : 58 \text{ г/моль} = 0,1 \text{ моль.}$$

Количество кислорода больше в 6,5 раз:

$$n(O_2) = 6,5n(C_4H_{10}) = 6,5 \cdot 0,1 \text{ моль} = 0,65 \text{ моль.}$$

Найдем объем кислорода:

$$V(O_2) = n(O_2) \cdot V_m = 0,65 \text{ моль} \cdot 22,4 \text{ л/моль} = 14,56 \text{ л.}$$

В воздухе примерно 20% кислорода (1/5), значит, объем воздуха должен быть в 5 раз больше:

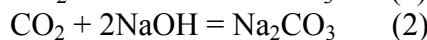
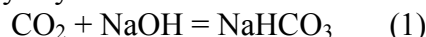
$$V(\text{возд}) = 5V(O_2) = 5 \cdot 14,56 \text{ л} = 72,8 \text{ л.}$$

(При расчете с учетом точного содержания кислорода в воздухе 20,95% объем воздуха равен:

$$V(\text{возд}) = V(O_2) : \chi(O_2) = 14,56 \text{ л} : 0,2095 = 69,5 \text{ л.})$$

2)

С гидроксидом натрия реагирует углекислый газ. Возможные уравнения:



Поскольку в условии требуется найти минимальную массу гидроксида натрия, то расчет ведем по 1-му уравнению.

Найдем количество CO_2 :

$$n(CO_2) = 4n(C_4H_{10}) = 4 \cdot 0,1 \text{ моль} = 0,4 \text{ моль.}$$

Количество гидроксида натрия равно количеству углекислого газа:

$$n(NaOH) = n(CO_2) = 0,4 \text{ моль.}$$

Найдем массу гидроксида натрия:

$$m(NaOH) = n(NaOH) \cdot M(NaOH) = 0,4 \text{ моль} \cdot 40 \text{ г/моль} = 16 \text{ г.}$$

Найдем массу 4%-ного раствора гидроксида натрия:

$$m(\text{р-ра NaOH}) = m(NaOH) : \omega(NaOH) = 16 \text{ г} : 0,04 = 400 \text{ г.}$$

3)

Вещество в растворе после реакции - $NaHCO_3$. Найдем его количество и массу:

$$n(NaHCO_3) = n(NaOH) = 0,4 \text{ моль.}$$

$$m(NaHCO_3) = n(NaHCO_3) \cdot M(NaHCO_3) = 0,4 \text{ моль} \cdot 84 \text{ г/моль} = 33,6 \text{ г.}$$

Выразим массу раствора:

$$m(\text{p-ра NaHCO}_3) = m(\text{p-ра NaOH}) + m(\text{CO}_2) + m(\text{H}_2\text{O}).$$

Найдем массы продуктов сгорания бутана:

$$m(\text{CO}_2) = n(\text{CO}_2) \cdot M(\text{CO}_2) = 0,4 \text{ моль} \cdot 44 \text{ г/моль} = 17,6 \text{ г.}$$

$$m(\text{H}_2\text{O}) = n(\text{H}_2\text{O}) \cdot M(\text{H}_2\text{O}) = 5n(\text{C}_4\text{H}_{10}) \cdot M(\text{H}_2\text{O}) = 5 \cdot 0,1 \text{ моль} \cdot 18 \text{ г/моль} = 9 \text{ г.}$$

Найдем массу раствора:

$$m(\text{p-ра NaHCO}_3) = 400 + 17,6 + 9 = 426,6 \text{ г.}$$

Найдем массовую долю гидрокарбоната натрия в растворе:

$$\omega(\text{NaHCO}_3) = m(\text{NaHCO}_3) : m(\text{p-ра NaHCO}_3) = 33,6 : 426,6 = 0,07876 \text{ или } 7,876\%.$$

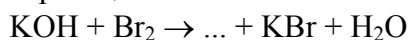
Ответ: 1) 71 л; 2) 400 г; 3) 7,9%

Задача 5

Задача предложена Натальей Игоревной Морозовой, старшим преподавателем

СУНЦ МГУ

Укажите возможные продукты в реакции:



1) HBr; 2) KBrO; 3) Br₂O₇; 4) KH; 5) KBrO₃.

Решение

Поскольку в результате реакции из Br₂ (Br⁰) образуется KBr (Br⁻¹), то реакция – окислительно-восстановительная. Бром уменьшил степень окисления, значит, какой-то из атомов должен ее увеличить.

До реакции степени окисления были: K⁺¹, O⁻², H⁺¹, Br⁰

1) HBr H⁺¹, Br⁻¹ не подходит

2) KBrO K⁺¹, Br⁺¹, O⁻² подходит

3) Br₂O₇ Br⁺⁷, O⁻² формально подходит, но одновременное присутствие в продуктах воды и оксида брома невозможно: они реагируют между собой:



4) KH K⁺¹, H⁻¹ не подходит

5) KBrO₃ K⁺¹, Br⁺⁵, O⁻² подходит

Ответы: 2) KBrO; 5) KBrO₃.

Задача 6

Задача предложена Натальей Игоревной Морозовой, старшим преподавателем

СУНЦ МГУ

Массовая доля кислорода в нитрате двухвалентного металла равна 58,54%. Запишите название этого металла.

Решение

Общая формула нитрата двухвалентного металла: M(NO₃)₂. Выразим массовую долю кислорода в этом нитрате через молярные массы:

$$\omega(\text{O}) = \frac{6M(\text{O})}{M(\text{M}) + 2M(\text{N}) + 6M(\text{O})} = 6 \cdot 16 / (M + 2 \cdot 14 + 6 \cdot 16) = 96 / (M + 124).$$

По условию

$$\omega(\text{O}) = 0,5854.$$

Тогда

$$96 / (M + 124) = 0,5854.$$

Отсюда

$$M = 40 \text{ г/моль.}$$

Это молярная масса кальция.

Ответ: кальций.

10 класс

Задача 1

Задача предложена АГ СПбГУ

К 200 мл 30,0% раствора бромоводородной кислоты (плотность 1,35 г/мл) прибавили 120 мл раствора с массовой долей аммиака 14,6% (плотность 0,97 г/мл). Полученный раствор будет обладать реакцией:

- А) кислой;
- Б) нейтральной;
- В) щелочной.

При проведении расчетов используйте целочисленные значения атомных масс.

Решение

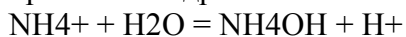
Определим количества реагирующих веществ:

$$n(\text{HBr}) = V \cdot \rho \cdot w / (100 \cdot M) = 200 \cdot 1.35 \cdot 30 / (100 \cdot 81) = 1 \text{ моль}$$

$$n(\text{NH}_3) = V \cdot \rho \cdot w / (100 \cdot M) = 120 \cdot 0.97 \cdot 14.6 / (100 \cdot 17) = 1 \text{ моль}$$

Таким образом, при сливании получится 1 моль бромид аммония.

Поскольку бромид аммония образован слабым основанием и сильной кислотой, будет протекать гидролиз:



Раствор будет иметь кислую реакцию.

Ответ: А

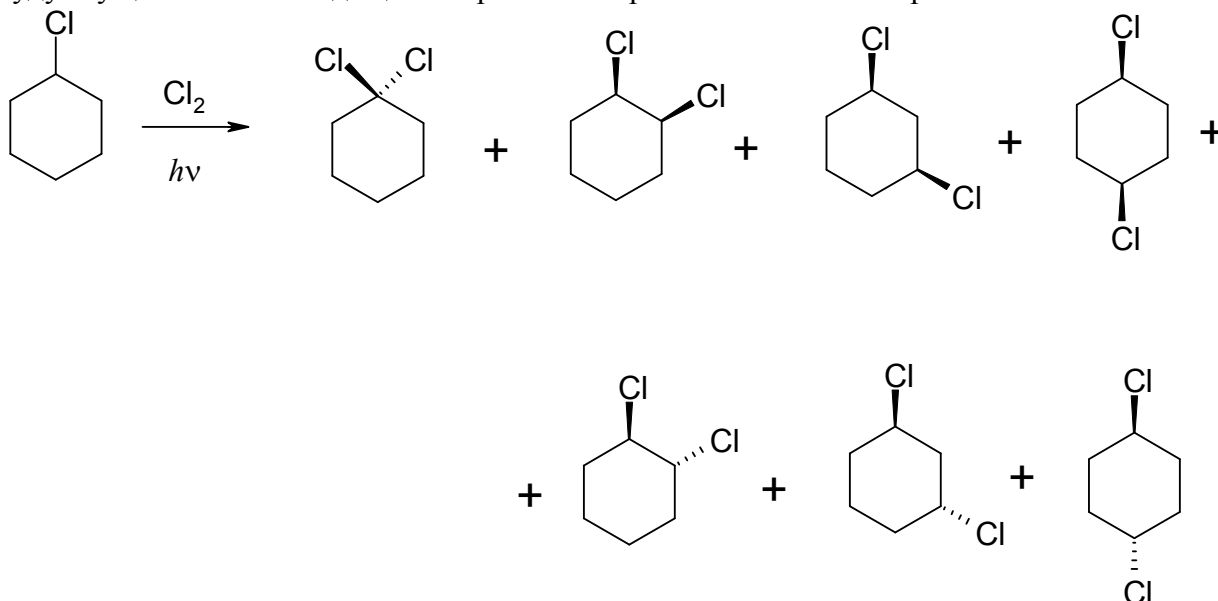
Задача 2

Задача предложена АГ СПбГУ

Какое количество изомерных дихлорпроизводных образует циклогексан: А) 4; Б) 6; В) 7; Г) 8?

Решение

Дихлорпроизводными циклогексана являются: 1,1-дихлорциклогексан, 1,2-дихлорциклогексан, 1,3-дихлорциклогексан, 1,4-дихлорциклогексан. Три последних будут существовать в виде цис- и транс-изомеров. Итого – 7 изомеров:



Ответ: В

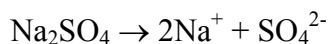
Задача 3

Задача предложена Натальей Игоревной Морозовой, старшим преподавателем СУНЦ МГУ

Сколько разных видов ионов с концентрацией более 0,001 моль/л присутствует в растворе, содержащем в литре 1 моль Na_2SO_4 ?

1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4.

Решение



В растворе 2 вида ионов: ионы натрия (с концентрацией 2 моль/л) и сульфат-ионы (с концентрацией 1 моль/л).

Кроме них, в водном растворе находятся ионы H^+ и OH^- , образующиеся при обратимой диссоциации воды, но их концентрации гораздо меньше 0,001 моль/л (а именно 10^{-7} моль/л), т.к. вода - очень слабый электролит.

Ответ: 2) 2.

Задача 4

Задача предложена Натальей Игоревной Морозовой, старшим преподавателем СУНЦ МГУ

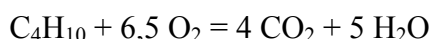
Газовая зажигалка содержит 5,8 г сжиженного газа – бутана, имеющего формулу C_4H_{10} .

1) Сколько л воздуха (при н.у.) необходимо для полного сгорания всего газа из зажигалки?

2) Какая минимальная масса 4%-ного раствора гидроксида натрия достаточна для реакции с продуктами сгорания?

3) Определите массовую долю вещества в растворе, полученном после реакции, описанной в п.2.

Решение



1)

Найдем количество бутана:

$$n(\text{C}_4\text{H}_{10}) = m(\text{C}_4\text{H}_{10}) : M(\text{C}_4\text{H}_{10}) = 5,8 \text{ г} : 58 \text{ г/моль} = 0,1 \text{ моль.}$$

Количество кислорода больше в 6,5 раз:

$$n(\text{O}_2) = 6,5n(\text{C}_4\text{H}_{10}) = 6,5 \cdot 0,1 \text{ моль} = 0,65 \text{ моль.}$$

Найдем объем кислорода:

$$V(\text{O}_2) = n(\text{O}_2) \cdot V_m = 0,65 \text{ моль} \cdot 22,4 \text{ л/моль} = 14,56 \text{ л.}$$

В воздухе примерно 20% кислорода (1/5), значит, объем воздуха должен быть в 5 раз больше:

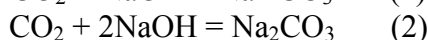
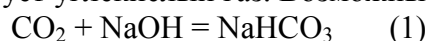
$$V(\text{возд}) = 5V(\text{O}_2) = 5 \cdot 14,56 \text{ л} = 72,8 \text{ л.}$$

(При расчете с учетом точного содержания кислорода в воздухе 20,95% объем воздуха равен:

$$V(\text{возд}) = V(\text{O}_2) : \chi(\text{O}_2) = 14,56 \text{ л} : 0,2095 = 69,5 \text{ л.}$$

2)

С гидроксидом натрия реагирует углекислый газ. Возможные уравнения:



Поскольку в условии требуется найти минимальную массу гидроксида натрия, то расчет ведем по 1-му уравнению.

Найдем количество CO_2 :

$$n(\text{CO}_2) = 4n(\text{C}_4\text{H}_{10}) = 4 \cdot 0,1 \text{ моль} = 0,4 \text{ моль.}$$

Количество гидроксида натрия равно количеству углекислого газа:

$$n(\text{NaOH}) = n(\text{CO}_2) = 0,4 \text{ моль.}$$

Найдем массу гидроксида натрия:

$$m(\text{NaOH}) = n(\text{NaOH}) \cdot M(\text{NaOH}) = 0,4 \text{ моль} \cdot 40 \text{ г/моль} = 16 \text{ г.}$$

Найдем массу 4%-ного раствора гидроксида натрия:

$$m(\text{р-ра NaOH}) = m(\text{NaOH}) : \omega(\text{NaOH}) = 16 \text{ г} : 0,04 = 400 \text{ г.}$$

3)

Вещество в растворе после реакции - NaHCO_3 . Найдем его количество и массу:

$$n(\text{NaHCO}_3) = n(\text{NaOH}) = 0,4 \text{ моль.}$$

$$m(\text{NaHCO}_3) = n(\text{NaHCO}_3) \cdot M(\text{NaHCO}_3) = 0,4 \text{ моль} \cdot 84 \text{ г/моль} = 33,6 \text{ г.}$$

Выразим массу раствора:

$$m(\text{р-ра NaHCO}_3) = m(\text{р-ра NaOH}) + m(\text{CO}_2) + m(\text{H}_2\text{O}).$$

Найдем массы продуктов сгорания бутана:

$$m(\text{CO}_2) = n(\text{CO}_2) \cdot M(\text{CO}_2) = 0,4 \text{ моль} \cdot 44 \text{ г/моль} = 17,6 \text{ г.}$$

$$m(\text{H}_2\text{O}) = n(\text{H}_2\text{O}) \cdot M(\text{H}_2\text{O}) = 5n(\text{C}_4\text{H}_{10}) \cdot M(\text{H}_2\text{O}) = 5 \cdot 0,1 \text{ моль} \cdot 18 \text{ г/моль} = 9 \text{ г.}$$

Найдем массу раствора:

$$m(\text{р-ра NaHCO}_3) = 400 + 17,6 + 9 = 426,6 \text{ г.}$$

Найдем массовую долю гидрокарбоната натрия в растворе:

$$\omega(\text{NaHCO}_3) = m(\text{NaHCO}_3) : m(\text{р-ра NaHCO}_3) = 33,6 : 426,6 = 0,07876 \text{ или } 7,876\%.$$

Ответ: 1) 71 г; 2) 400 г; 3) 7,9%

Задача 5

Задача предложена Натальей Игоревной Морозовой, старшим преподавателем СУНЦ МГУ

Укажите возможные продукты в реакции:



1) HBr ; 2) KBrO ; 3) Br_2O_7 ; 4) KH ; 5) KBrO_3 .

Решение

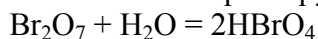
Поскольку в результате реакции из Br_2 (Br^0) образуется KBr (Br^{-1}), то реакция – окислительно-восстановительная. Бром уменьшил степень окисления, значит, какой-то из атомов должен ее увеличить.

До реакции степени окисления были: K^{+1} , O^{-2} , H^{+1} , Br^0

1) HBr H^{+1} , Br^{-1} не подходит

2) KBrO K^{+1} , Br^{+1} , O^{-2} подходит

3) Br_2O_7 Br^{+7} , O^{-2} формально подходит, но одновременное присутствие в продуктах воды и оксида брома невозможно: они реагируют между собой:



4) KH K^{+1} , H^{-1} не подходит

5) KBrO_3 K^{+1} , Br^{+5} , O^{-2} подходит

Ответы: 2) KBrO ; 5) KBrO_3 .

Задача 6

Задача предложена Натальей Игоревной Морозовой, старшим преподавателем СУНЦ МГУ

Массовая доля кислорода в нитрате двухвалентного металла равна 58,54%. Запишите название этого металла.

Решение

Общая формула нитрата двухвалентного металла: $M(NO_3)_2$. Выразим массовую долю кислорода в этом нитрате через молярные массы:

$$\omega(O) = \frac{6M(O)}{M(M) + 2M(N) + 6M(O)} = 6 \cdot 16 / (M + 2 \cdot 14 + 6 \cdot 16) = 96 / (M + 124).$$

По условию

$$\omega(O) = 0,5854.$$

Тогда

$$96 / (M + 124) = 0,5854.$$

Отсюда

$$M = 40 \text{ г/моль.}$$

Это молярная масса кальция.

Ответ: кальций.