ФИЗИКА

8 класс

Задача 1

Задача предложена СУНЦ УрГУ.

Плотность свинца при комнатной температуре равна 11300 кг/м^3 . В результате теплового расширения длина ребра свинцового кибика увеличилась на 0.5%. Чему равна его плотность теперь?

Решение:

Обозначим массу кубика m. Заметим, что при нагревании она не меняется. Длина ребра кубика после нагревания стала 1,005a, где a - длина ребра кубика до нагревания. Его объём стал равен $V'=(1{,}005)^3\ a^3$. Така как масса кубика не изменилась, то плотность p' стала равна $p' = m/V'=p/(1{,}005)^3$

После подстановки числовых значений получим, что плотность равна p'=11132 кг/м^3 .

Ответ: p'=11132 кг/м^3

Задача 2

Задача предложена СУНЦ УрГУ.

Во время просмотра трансляции хоккейного матча с олимпийских игр в Ванкувере лицеист Петя увидел следующий эпизод: во время разминки хоккеист, находящийся у борта, послал шайбу к противоположному борту и сразу же поехал вслед за ней. Шайба, долетев до противоположного борта, мгновенно отскочила от него и полетела обратно. Хоккеист поймал шайбу, когда успел проехать от первого борта 1/3 длины всего поля. Во сколько раз скорость шайбы больше скорости хоккеиста? Считать, что движение шайбы и хоккеиста происходит вдоль одной прямой, параллельной боковым бортам.

Решение:

Обозначим скорость хоккеиста $V_х$, скорость шайбы $V_ш$. Тогда поскольку времена движения хоккеиста и шайбы одинаковы, а хоккеист при этом проходит расстояние L/3, а шайба 5L/3, где L – длина борта, вдоль которого происходит движение, можно записать

$$\frac{L}{3V_х} = \frac{5L}{3V_ш}.$$

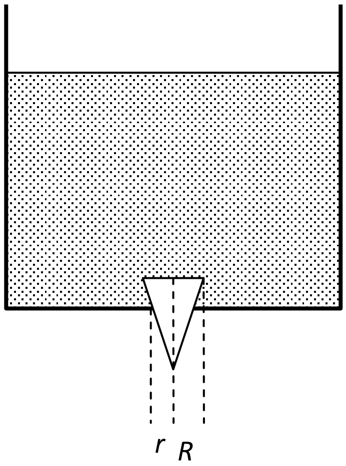
Отсюда получим, что скорость шайбы в пять раз больше скорости хоккеиста, т.е.

$$V_ш = 5V_х.$$

Задача 3

Задача предложена АГ СПбГУ

Отверстие в баке с водой радиуса *r* закрыто конической пробкой, радиус основания которой $R>r$.



Пробка прижимается к отверстию только силой давления воды и силой тяжести (трения между пробкой и отверстием нет). Если взять коническую пробку того же объема и сделанную из того же материала но с меньшим значением радиуса *R*, то сила, необходимая для того, чтобы поднять пробку:

а) не изменится,

б) увеличится,

в) уменьшится,

г) результат зависит от параметров задачи.

Решение:

При сохранении объема сила тяжести, действующая на пробку, не изменится. При уменьшении радиуса основания сила давления воды на основание пробки увеличится, поскольку пробка опустится ниже. Сила, действующая на боковую поверхность, уменьшится, поскольку уменьшится сама боковая поверхность. В итоге результирующая сила, прижимающая пробку к поверхности, увеличится. Количественное решение см. для аналогичной задаче 10 кл.

Ответ: б

Задача 4

Задача предложена АГ СПбГУ

В термосе объемом 250 мл находится 100 г воды при температуре 34^0С. В термос кидают кубики льда массой 78 г, температура которых 0^0С. Спустя достаточно длительное время термос доверху доливают керосином с температурой 20^0С. Сколько керосина (в миллилитрах) вошло в термос? Какая температура вещества установится в термосе, спустя достаточно продолжительное время?

Считать, что керосин не смешивается с водой и не влияет на температуру плавления льда. Тепловыми потерями термоса пренебречь. Необходимые численные данные приведены в таблице.

	плотность (кг/м^3)	удельная теплоемкость Дж/(кг$\cdot^0$С)	удельная теплота плавления (Дж/кг)
Вода	1000	4200	340000
Лед	900	2100	
Керосин	800	2100	

Решение:

При помещении льда в термос он начнет таять, забирая тепло от воды. Максимальное тепло, которое может отдать вода, охладившись до температуры 0^0С равно:

Q = 4200·0.1·34=14280 Дж.

Масса растаявшего льда при этом равна:

$m_л$ = 14280/340000=0,042 кг.

При этом объем получившейся воды равен:

$m_в$ = 100+42 = 142 мл.

Масса не растаявшего льда равна:

$m_{1л}$ = 0,078 – 0,042 = 0,036 кг.

Объем не растаявшего льда равен:

$V_л$ = 0,036/900 = $4\cdot10^{-5}$ м^3 = 40 мл.

Таким образом, после установления температуры в термосе в нем будет смесь воды и льда при температуре 0^0С, занимающая объем V = 142+40=182 мл. В термос вошло 250 - 182 = 68 мл керосина. Керосин полностью покроет лед. Масса керосина равна 68·0,8=54,4 г.

Охладившись до 0^0С, керосин отдаст количество тепла, равное:

$Q_к$ = 2100·0,0544·20 = 2284,8 Дж.

Этого количества тепла хватит, чтобы растопить лед массой:

$m_{2л}$ = 2284,8/340000=0,0067 кг = 6,7 г.

Таким образом, весь лед не сможет растаять, и температура вещества в термосе установится равной 0^0С.

Ответ:

V = 68 мл, t = 0^0С.

Задача 5

Задача предложена Сергеем Дмитриевичем Варламовым.

Алюминиевая фольга от шоколадки имеет размеры A×B = 25см×15 см и толщину h=0,1 мм. Если её свернуть в трубочку вдоль длинной стороны, то получится цилиндр, между концами которого имеется некоторое омическое сопротивление. Какова его величина? Удельное сопротивление алюминия $\rho_{эл}$ = $2{,}5\times10^{-6}$ Ом×см. Получившийся проводник, находясь в воздухе, должен выдержать максимальное значение тока в течение 0,1 с. Каково значение I этого постоянного по величине тока? Температура плавления алюминия $t_{пл}$= 930 К, плотность алюминия $\rho_{масс}$ = 2,7 г/см^3, молярная теплоемкость алюминия $C_p \approx$ 24,6 Дж/(моль×К), его молярная масса равна μ =27 г/моль. Считайте, что удельное сопротивление и молярная теплоемкость твердого вещества от температуры не зависят. Потерями тепла в воздух за время 0,1 с можно пренебречь.

Решение

Самый простой вопрос про сопротивление цилиндра, оно равно: $R=\rho A/(Bh)=416\times10^{-6}$ Ом. За время 0,1 секунды нагревшийся алюминий еще не должен расплавиться, то есть выполняется неравенство:

$I^2Rt<(t_{пл}-t_0)C_p\times\rho_{масс}ABh/\mu$.

$I< Bh\times[(t_{пл}-t_0)C_p\times\rho_{масс}/(\rho_{эл}t\mu)]^{0.5}$.

Отсюда находится значение тока: $I < 1.2\times10^4$ А.

Задача 6

Задача предложена Сергеем Дмитриевичем Варламовым.

В пустой аквариум аккуратно «налили» углекислый газ (μ=44г/моль), а затем опустили в него короб со стенками из алюминиевой фольги в форме пустого внутри куба. Ребро куба A = 25 см. Какой может быть максимальная толщина фольги d, если короб, заполненный воздухом ($\mu_{средн}$=29г/моль), «плавает» в углекислом газе? Плотность алюминия ρ=2,7г/см^3. Температура в комнате t=+20°C, атмосферное давление P = 10^5 Па.

Решение

Средняя плотность короба с воздухом должна быть не больше плотности углекислого газа, отсюда следует соотношение:

$6\rho d + A(P/RT)\times\mu_{средн} < A(P/RT)\times\mu_{угл.газ}$.

Отсюда следует:

$A(P/RT)\times(\mu_{угл.газ} - \mu_{средн})/(6\rho) > d$. Или $d < 9.5 \times 10^{-6}$ м.

9 класс

Задача 1

Задача предложена СУНЦ УрГУ

Барон Мюнхаузен при полёте на Луну использовал пушку с длиной ствола L = 600 м. Чтобы отправить снаряд в межпланетное пространство, ему нужно было сообщить скорость V = 12 км/с. Считайте, что снаряд в стволе пушки двигался равноускоренно в направлении вертикально вверх. Определите, с какой силой давил на дно снаряда барон Мюнхаузен, находящийся внутри снаряда, если его масса m = 80 кг.

Решение:

Для начала определим ускорение a снаряда вместе с находящимся в нём бароном. Так как, двигаясь равноускоренно вверх, снаряд с бароном из состояния покоя, пройдя расстояние S, имеет скорость V, то

$$2aS = V^2.$$

Отсюда находим ускорение a

$$a = \frac{V^2}{2S}.$$

Определим вес P барона Мюнхаузена (сила, с которой тело действует на опору, называется весом). По третьему закону Ньютона, сила, с которой тело действует на опору равна по модулю и противоположна по направлению силе, с которой опора действует на тело, то есть силе нормальной реакции опоры N

$$\vec{P} = -\vec{N}.$$

Запишем уравнение движения барона. Пусть его масса равна m, он находится внутри снаряда, движущегося вертикально вверх с ускорением a, со стороны снаряда на него действует сила N, со стороны Земли – сила тяжести mg. Поэтому

$$ma = N - mg,$$

отсюда находим ускорение a

$$N = m(g + a) = m(g + \frac{V^2}{2S}).$$

Подставив числовые значения величин, получим $N = 9.6 \cdot 10^6$ Н .

Задача 2

Задача предложена СУНЦ УрГУ

Свинцовая пуля массой m = 9 г, летящая со скоростью V = 900 м/с, разогревается из-за трения о воздух до температуры T_1 = 150°C. Пуля попадает в сугроб и застревает в нём. Какое максимальное количество снега может при этом растаять?

Теплоёмкость свинца с = 130 $\frac{Дж}{кг \cdot град}$, удельная теплота плавления снега равна λ = 330000 $\frac{Дж}{кг}$.

Решение:

Будем считать, что температура снега равна $T_2 = 0^0$ С. Максимальное количество снега растает при условии, что вся кинетическая энергия пули $\frac{mV^2}{2}$ и количество теплоты, выделившееся при её охлаждении от T_1 = 150°C до $T_2 = 0^0$ С полностью пойдут на плавление снега. Таким образом, уравнение теплового баланса будет иметь вид

$$\frac{mV^2}{2} + cm|T_2 - T_1| = m'\lambda,$$

где m' – масса растаявшего снега.

Определим m'

$$m' = \frac{\frac{mV^2}{2} + cm|T_2 - T_1|}{\lambda}.$$

После подстановки числовых значений получим m' = 11,6 г.

Задача 3

Задача предложена АГ СПбГУ

Электромонтеру Васе необходимо сконструировать электроплитку, которая должна питаться от имеющегося у него аккумулятора. В его распоряжении достаточно длинная электрическая спираль, а из измерительных приборов только рулетка и часы.

Вася взял кусок спирали длины l_0, вставил его в электроплитку и измерил время, необходимое для закипания определенной порции воды. Затем он взял кусок спирали равный $4l_0$ и вскипятил то же самое количество воды с той же начальной температурой. К его удивлению он получил то же самое время. Какую длину спирали в единицах l_0 ему следует взять, чтобы получить наиболее эффективную плитку (вода закипит за наименьшее время)? Считать, что за время опытов аккумуляторная батарея не изменяет своих параметров. Тепловыми потерями на нагревание окружающего воздуха и других предметов пренебречь.

Решение:

Достаточно очевидно, что, если не учитывать внутреннее сопротивление аккумулятора, то мощности плиток с различными длинами спиралей, а, следовательно, и время закипания воды будет различным. При учете внутреннего сопротивления аккумулятора ток в цепи будет равен:

$$I = \frac{\varepsilon}{r + R},$$

где ε - ЭДС аккумулятора, r – внутреннее сопротивление аккумулятора, R – сопротивление спирали. В соответствии с законом Джоуля-Ленца выделившееся за время t в спирали тепло равно:

$$Q = I^2 Rt = \frac{\varepsilon^2 Rt}{(r + R)^2}.$$

Если именно это тепло требуется для закипания данной порции воды, то время, необходимое для закипания равно:

$$t = \frac{Q(r + R)^2}{\varepsilon^2 R}.$$

Сопротивление R очевидно пропорционально длине спирали: $R = Cl$. Подставим это значение в выражение для t и выполним некоторые преобразования:

$$t = \frac{Q(r + Cl)^2}{\varepsilon^2 Cl} = \frac{Qr}{\varepsilon^2}\left(\sqrt{\frac{r}{Cl}} + \sqrt{\frac{Cl}{r}}\right)^2 = \frac{Qr}{\varepsilon^2}\left(\sqrt{\frac{l}{L}} + \sqrt{\frac{L}{l}}\right)^2 = \frac{Qr}{\varepsilon^2}\left(x + \frac{1}{x}\right)^2.$$

В этих формулах $L = r/C$, $x = \sqrt{l / L}$.

Из неравенства о среднем арифметическом и среднем геометрическом можно получить:

$$x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2,$$

причем равенство достигается при $x = 1$. Отсюда минимальное время закипания будет при $x = 1$, то есть при $l = L$. Остается из условий задачи найти L.

Заметим, что равенство

$$x_1 + \frac{1}{x_1} = x_2 + \frac{1}{x_2}$$

выполняется только при $x_2 = x_1$, или при $x_2 = 1/x_1$. По условию задачи:

$$x_1 = \sqrt{l_0 / L}, \quad x_2 = \sqrt{4l_0 / L}\,.$$

Из уравнения $x_2 \cdot x_1 = 1$ получим:

$$2l_0 / L = 1 \Rightarrow L = 2l_0\,.$$

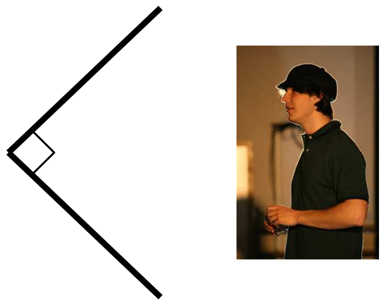
Таким образом, длина спирали, при которой время закипания будет минимальным равна $2l_0$.

Ответ: 2.

Задача 4

Задача предложена АГ СПбГУ

Человек стоит перед большим двугранным зеркалом, таким, что угол между зеркалами равен 90^0, а линия соединения зеркал горизонтальна.



Он одет в футболку с цифрой 6 на груди. Какой символ он видит в отражении:

а) 6

б) 9

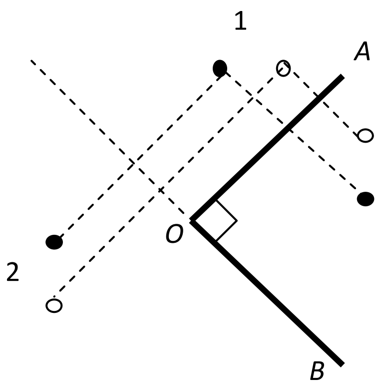
в) 

г) 

Решение:

Достаточно очевидно, что такое зеркало не переворачивает изображение справа налево. Рассмотрим, как преобразуется простейшая фигура:

Построение изображения этой фигуры приведено на рис.:



Изображение 1 получается при отражении в зеркале *OA* и является исходным изображением, которое затем отражается в зеркале *OB*. Видно, что в результате двух отражений изображение переворачивается сверху вниз.

Допустим теперь, что человек «оторвал» цифру 6 от футболки и, не поворачивая ее поместил перед собой. Он увидит символ

Двугранное зеркало перевернет этот символ сверху вниз, и человек увидит после отражения цифру 9. Проверьте сами на опыте.

Ответ: 9

Задача 5

Задача предложена Сергеем Дмитриевичем Варламовым.

Алюминиевая фольга от шоколадки имеет размеры A×B = 25см×15 см и толщину h=0,1 мм. Если её свернуть в трубочку вдоль длинной стороны, то получится цилиндр, между концами которого имеется некоторое омическое сопротивление. Какова его величина? Удельное сопротивление алюминия $\rho_{эл}$ = 2,5×10^{-6} Ом×см. Получившийся проводник, находясь в воздухе, должен выдержать максимальное значение тока в течение 0,1 с. Каково значение I этого постоянного по величине тока? Температура плавления алюминия $t_{пл}$= 930 К, плотность алюминия $\rho_{масс}$ = 2,7 г/$см^3$, молярная теплоемкость алюминия C_p ≈ 24,6 Дж/(моль×К), его молярная масса равна μ =27 г/моль. Считайте, что удельное сопротивление и молярная теплоемкость твердого вещества от температуры не зависят. Потерями тепла в воздух за время 0,1 с можно пренебречь.

Решение

Самый простой вопрос про сопротивление цилиндра, оно равно: R=ρA/(Bh)=416×10^{-6} Ом. За время 0,1 секунды нагревшийся алюминий еще не должен расплавиться, то есть выполняется неравенство:

$I^2Rt<(t_{пл}-t_0)C_p\times\rho_{масс}ABh/\mu$.

$I < Bh\times[(t_{пл}-t_0)C_p\times\rho_{масс}/(\rho_{эл}t\mu)]^{0.5}$.

Отсюда находится значение тока: $I < 1.2\times10^4$ А.

Задача 6

Задача предложена Сергеем Дмитриевичем Варламовым.

В пустой аквариум аккуратно «налили» углекислый газ (μ=44г/моль), а затем опустили в него короб со стенками из алюминиевой фольги в форме пустого внутри куба. Ребро куба A = 25 см. Какой может быть максимальная толщина фольги d, если короб, заполненный воздухом ($\mu_{средн}$=29г/моль), «плавает» в углекислом газе? Плотность алюминия ρ=2,7г/см^3. Температура в комнате t=+20°С, атмосферное давление $P = 10^5$ Па.

Решение

Средняя плотность короба с воздухом должна быть не больше плотности углекислого газа, отсюда следует соотношение:

$6\rho d+A(P/RT)\times\mu_{средн} < A(P/RT)\times\mu_{угл.газ}$.

Отсюда следует:

$A(P/RT)\times(\mu_{угл.газ}-\mu_{средн})/(6\rho) > d$. Или $d < 9.5\times10^{-6}$ м.

10 класс

Задача 1

Задача предложена СУНЦ УрГУ

Футболист бьет головой мяч, горизонтально летящий со скоростью 25 м/с. Скорость головы в момент этого абсолютно упругого удара составила 10 м/с. Определить максимально возможную температуру воздуха в мяче, если известно, что мяч имел массу 300 г, объем 5 л, избыточное давление 0,2 атм. Температура воздуха 27 градусов. Считайте, что скорость головы от удара не изменилась. Ответ округлить до целых градусов Цельсия.

Решение:

Перейдем в систему отсчета связанную с головой футболиста: V`=35 м/с.

Запишем закон сохранения энергии в этой системе отсчета: $U_1 + E_k = U_2$

$2{,}5 \cdot P \cdot V + 0{,}5 \cdot m \cdot V`^2 = 2{,}5 \cdot (P \cdot V/T)T_{max}$

$T_{max} = T + 0{,}2 \cdot m \cdot V`^2 \cdot T/(P \cdot V) = 337$ K

Ответ: 64

Задача 2

Задача предложена СУНЦ УрГУ

Канадский хоккеист, выполняя серию буллитов, катнул в створ ворот противника по льду шайбу, но промахнулся! И поэтому шайба, пройдя рядом со штангой, упруго отскочив от борта, свободно закатилась в ворота канадцев, остановившись там сразу за линией. На какое расстояние отъехали бы ворота противника, если бы канадец все-таки попал ровно в их центр? При попадании в ворота противника шайба запутывается в сетке ворот. Масса ворот в сто раз больше, чем масса шайбы. Считайте коэффициент трения ворот об лед таким же, как и шайбы об лед. Длина площадки 61 м. Ответ выразите в миллиметрах, округлив до целого числа.

Решение:

Так как шайба докатилась от ворот до борта и обратно до других ворот, то можно утверждать, что она по льду прокатилась 61м.

По теореме о кинетической энергии получаем скорость перед ударом о ворота: $(2kgL)^{0,5}$, где L = 61м.

По закону сохранения импульса получим скорость ворот: $m\,(2kgL)^{0,5}/(M+m)$

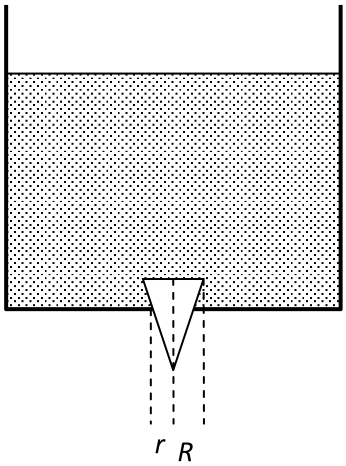
И снова по теореме о кинетической энергии получаем искомое расстояние: $m^2(2kgL)/(M+m)^2 = 2*k*g*X$

Ответ: $X=L/(1+M/m)=6$ мм.

Задача 3

Задача предложена АГ СПбГУ

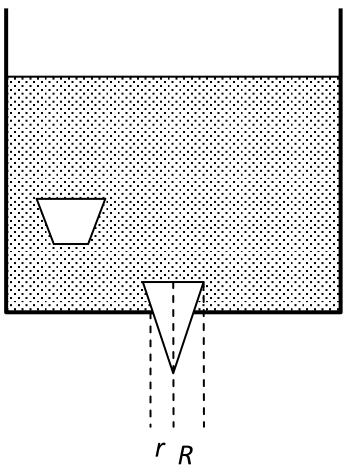
Отверстие в баке с водой радиуса r закрыто конической пробкой, радиус основания которой $R>r$.



Пробка прижимается к отверстию только силой давления воды и силой тяжести (трения между пробкой и отверстием нет). Насколько различаются сила, необходимая для того, чтобы поднять пробки одинакового объема V=216 см^3, для которых отношения $x=R/r$ принимают значения 2 и 3? Ответ выразить в ньютонах, значение ускорения свободного падения принять равным 10 м/с^2.

Решение:

Рассмотрим усеченный конус, полностью погруженный в воду:



Силу Архимеда, действующую на этот конус можно представить в виде суммы (векторной) сил:

$\mathbf{F}_A = \mathbf{F}_н + \mathbf{F}'$,

где $\mathbf{F}_н$ – сила давления воды на нижнее основание, а $\mathbf{F}'$ - сила, действующая на боковую поверхность и верхнее основание. Несложно понять, что сила $\mathbf{F}'$ и есть та сила, которая действует со стороны воды на коническую пробку, закрывающую отверстие. Таким образом, сила, необходимая для поднятия пробки равна:

$F = mg - F_A + \rho ghs$,

где m – масса пробки, h – высота уровня жидкости, s – площадь отверстия, а F_A – сила Архимеда, действующая на усеченный конус. Для решения задачи необходимо найти лишь разность сил Архимеда для двух различных пробок.

Сила Архимеда равна:

$F_A = \rho g(V - V_1)$,

где ρ - плотность воды, V – объем пробки, V_1 – объем конуса, лежащего ниже отверстия. Используя формулу для объема конуса, найдем:

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi r^2 H_1 = \frac{1}{3}\pi r^2 H\,\frac{r}{R} = \frac{1}{3}\pi R^2 H\left(\frac{r}{R}\right)^3 = V\left(\frac{r}{R}\right)^3 = \frac{V}{x^3}.$$

В этих формулах H и H_1 – высоты большого и малого конусов. В результате получаем ответ:

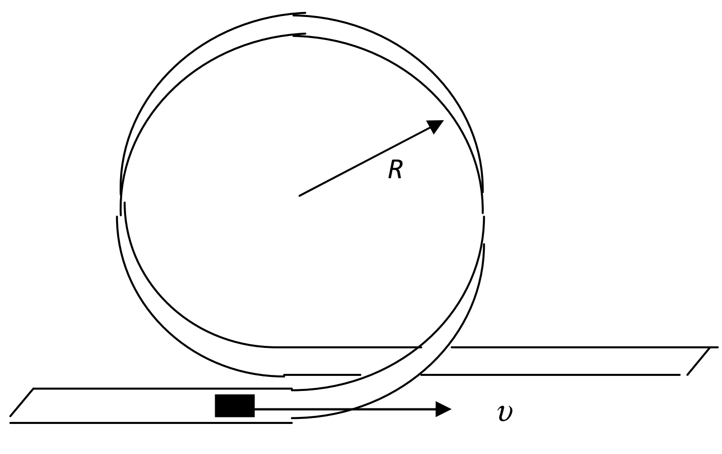
$$\Delta F = \rho g V\left(\frac{1}{x_1^3} - \frac{1}{x_2^3}\right) = 0{,}19\ \text{Н}.$$

Ответ: ΔF = 0,19 Н.

Задача 4

Задача предложена АГ СПбГУ

Тело скользит по мертвой петле:



Коэффициент трения равен μ = 0,04. Минимальная скорость тела в основании петли, необходимая для того, чтобы тело прошло по мертвой петле, не оторвавшись от поверхности равна υ. Какова в единицах υ будет минимальная скорость, необходимая для того, чтобы тело прошло по петле с радиусом в 25 раз большим при том же коэффициенте трения?

Решение:

В задаче 3 параметра, из которых только 2 размерных – R и g. Из этих параметров можно сконструировать только одну величину с размерностью скорости, пропорциональную $\sqrt{gR}$. Таким образом, необходимая скорость определяется выражением:

$$\upsilon = f(\mu)\sqrt{gR},$$

где $f(\mu)$ – некоторая функция от коэффициента трения. Если радиус петли увеличится в 25 раз, минимальная скорость увеличится в 5 раз.

Ответ: 5.

Задача 5

Задача предложена Сергеем Дмитриевичем Варламовым.

Алюминиевая фольга от шоколадки имеет размеры A×B = 25см×15 см и толщину h=0,1 мм. Если её свернуть в трубочку вдоль длинной стороны, то получится цилиндр, между концами которого имеется некоторое омическое сопротивление. Какова его величина? Удельное сопротивление алюминия $\rho_{эл} = 2{,}5\times10^{-6}$ Ом×см. Получившийся проводник, находясь в воздухе, должен выдержать максимальное значение тока в течение 0,1 с. Каково значение I этого постоянного по величине тока? Температура плавления алюминия $t_{пл}$= 930 К, плотность алюминия $\rho_{масс}$ = 2,7 г/см^3, молярная теплоемкость алюминия $C_p \approx 24{,}6$ Дж/(моль×К), его молярная масса равна μ =27 г/моль. Считайте, что удельное сопротивление и молярная теплоемкость твердого вещества от температуры не зависят. Потерями тепла в воздух за время 0,1 с можно пренебречь.

Решение

Самый простой вопрос про сопротивление цилиндра, оно равно: $R=\rho A/(Bh)=416\times10^{-6}$ Ом. За время 0,1 секунды нагревшийся алюминий еще не должен расплавиться, то есть выполняется неравенство:

$I^2Rt<(t_{пл}-t_0)C_p\times\rho_{масс}ABh/\mu$.

$I < Bh\times[(t_{пл}-t_0)C_p\times\rho_{масс}/(\rho_{эл}t\mu)]^{0.5}$.

Отсюда находится значение тока: $I < 1.2\times10^4$ А.

Задача 6

Задача предложена Сергеем Дмитриевичем Варламовым.

В пустой аквариум аккуратно «налили» углекислый газ (μ=44г/моль), а затем опустили в него короб со стенками из алюминиевой фольги в форме пустого внутри куба. Ребро куба A = 25 см. Какой может быть максимальная толщина фольги d, если короб, заполненный воздухом ($\mu_{средн}$=29г/моль), «плавает» в углекислом газе? Плотность алюминия ρ=2,7г/см^3. Температура в комнате t=+20°C, атмосферное давление $P = 10^5$ Па.

Решение

Средняя плотность короба с воздухом должна быть не больше плотности углекислого газа, отсюда следует соотношение:

$6\rho d+A(P/RT)\times\mu_{средн} < A(P/RT)\times\mu_{угл.газ}$.

Отсюда следует:

$A(P/RT)\times(\mu_{угл.газ}-\mu_{средн})/(6\rho) > d$. Или $d < 9.5\times10^{-6}$ м.

МАТЕМАТИКА

8 класс

Задача 1

Задача предложена Григорием Михайловичем Головачевым, преподавателем Академической гимназии СПбГУ, к.ф.-м.н.

Пусть $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, … - все решения системы уравнений $\begin{cases} \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{4}{y} = 19, \\ \dfrac{4}{x^2} + \dfrac{3}{y} = 30. \end{cases}$

Решите эту систему и в ответ запишите сумму $x_1 + y_1 + x_2 + y_2 + \ldots$

Решение

Введем новые переменные $a = \dfrac{1}{x^2}$, $b = \dfrac{1}{y}$. Система примет вид $\begin{cases} 3a + 4b = 19, \\ 4a + 3b = 30. \end{cases}$ и станет линейной относительно *a* и b. Решаем эту систему методом исключения переменных, получаем $\begin{cases} a = 9, \\ b = -2. \end{cases}$. Возвращаясь к переменным x_1, y_1, находим множество решений $\left(-\dfrac{1}{3}; -\dfrac{1}{2}\right), \left(\dfrac{1}{3}; -\dfrac{1}{2}\right)$.

Сумма всех значений переменных равна -1.

Замечание: можно было заметить, что система является четной по отношению к переменной *x*. Сумма всех значений этой переменной, являющихся решением системы, равна 0. Для поиска суммы значений переменных можно решить систему только относительно *y*, и написать удвоенную сумму получившихся решений.

Ответ: -1

Задача 2

Задача предложена Григорием Михайловичем Головачевым, преподавателем Академической гимназии СПбГУ, к.ф.-м.н.

Известно, что уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ и $bx^2 + cx + a = 0$ имеют один общий корень и $a \neq 0$. Найдите значение выражения $\frac{(a+b)^2}{c^2} + \frac{(b+c)^2}{a^2} + \frac{(c+a)^2}{b^2}$.

Решение

Пусть x_1 - общий корень наших уравнений. Он не может равняться 0, иначе из второго уравнения мы получили бы $a = 0$. Напишем верное равенство $a{x_1}^2 + bx_1 + c = 0$ и умножим его на x_1, получим $a{x_1}^3 + b{x_1}^2 + cx_1 = 0$. Выразим из второго уравнения $b{x_1}^2 + cx_1 = -a$, подставим в полученное равенство: $a{x_1}^3 - a = 0$. С учетом $a \neq 0$ получаем, что $x_1 = 1$. Теперь мы знаем, что $a + b + c = 0$. Это дает нам три соотношения $a + b = -c$; $b + c = -a$; $c + a = -b$. Остается подставить эти соотношения в выражение $\frac{(a+b)^2}{c^2} + \frac{(b+c)^2}{a^2} + \frac{(c+a)^2}{b^2}$. Получаем, что каждая дробь равна 1 и их сумма равна 3.

Ответ: 3.

Задача 3

На доске написаны два числа: 2 и 3. Каждую минуту Леша и Вова стирают числа с доски и записывают вместо них новые: Леша записывает их среднее гармоническое, а Вова сумму. Каким будет произведение чисел на доске через 10 минут? (Средним гармоническим чисел a и b называется $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$)

Решение

Среднее гармоническое равно $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b}$. Произведение суммы и среднего гармонического чисел a и b равно $2ab$. Таким образом, при каждом шаге произведение удваивается, следовательно, после 10 шагов оно будет равно $2^{10}ab = 1024 * 2 * 3 = 6144$.

Ответ: 6144

Задача 4

В равнобедренный треугольник ABC с основанием BC вписана окружность, касающаяся сторон BC, AB, AC в точках A_1, C_1, B_1 соответственно. $BC_1 = 7$, $AB_1 = 18$. Найти площадь треугольника ABC.

Решение

Отрезки касательных к окружности равны, следовательно, $AB_1=AC_1=18$, $BC_1=BA_1=7$, AB=AC=25, $CA_1=CB_1=7$. A_1 - середина BC, треугольник равнобедренный, значит AA_1 высота. По теореме

Пифагора $AA_1 = \sqrt{AB^2 - A_1B^2} = \sqrt{25^2 - 7^2} = 24$. Площадь треугольгика равна $\frac{AA_1 * BC}{2} = \frac{24 * 14}{2} = 168$.

Ответ: 168

Задача 5

Найти сумму коэффициентов многочлена $P(x) = (x^4 - x^3 + 1)^{10}$.

Решение:

Сумма коэффициентов равна $P(1) = (1 - 1 + 1)^{2010} = 1$.

Задача 6

Сумма шестидесяти четырех натуральных чисел равна 2010. Чему равен максимальный наибольший общий делитель этих чисел?

Решение

Пусть d наибольший общий делитель. Тогда $d \leq [\frac{2010}{64}] = 31$, но 2010 не делится на 31, следовательно, $d \leq 30$.

Пример для $d = 30$: 3 числа по 60, остальные по 30.

9 класс

Задача 1

Задача предложена Григорием Михайловичем Головачевым, преподавателем Академической гимназии СПбГУ, к.ф.-м.н.

Пристань расположена на берегу круглого озера. Две лодки одновременно отправились в разные стороны и все время плыли вдоль берега. Их встреча произошла через 30 мин. после отплытия. Второй раз они одновременно отправились в одну сторону, и также все время плыли вдоль берега. Первая лодка плыла быстрее, оторвалась вперед и догнала вторую через 70 мин. Найдите, за какое время первая лодка пройдет озеро по прямой в точку, диаметрально противоположную пристани. Ответ запишите в минутах; чтобы ответ получился целым, примите приближенно $\pi = 3$.

Решение

Пусть скорость первой лодки равна *x*, второй лодки – *y*. Примем длину окружности озера за *S*. При движении навстречу друг другу первоначальное расстояние между лодками равно *S*, оно сокращается со скоростью, равной сумме скоростей лодок. Во втором случае, когда лодки двигаются в одну сторону, расстояние между ними также равно *S* и сокращается со скоростью, равной разности скоростей. Это позволяет написать систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{S}{x+y} = 30, \\ \dfrac{S}{x-y} = 70. \end{cases}$

Мы не сможем найти *x* и *y,* но нам требуется найти время, за которое первая лодка проходит полный круг вдоль берега. Эта величина равна $\dfrac{S}{x}$. Перепишем систему так

$\begin{cases} S = 30(x+y), \\ S = 70(x-y). \end{cases}$, $\begin{cases} \dfrac{x}{S} + \dfrac{y}{S} = \dfrac{1}{30}, \\ \dfrac{x}{S} - \dfrac{y}{S} = \dfrac{1}{70}. \end{cases}$. Сложив уравнения, получим, что $\dfrac{x}{S} = \dfrac{7+3}{2 \cdot 210}$, откуда $\dfrac{S}{x} = 42$.

Таким образом, первая лодка проходит круг вдоль берега озера за 42 мин. Длина этого пути равна $S = \pi D$, где *D* – диаметр озера. Поэтому время, необходимое для пересечения озера в диаметрально противоположную точку, равно $\dfrac{D}{x} = \dfrac{S}{\pi x}$. С учетом приближения $\pi = 3$ искомое время равно 14.

Ответ: 14

Задача 2

Задача предложена Григорием Михайловичем Головачевым, преподавателем Академической гимназии СПбГУ, к.ф.-м.н.

На листе бумаги нарисованы непересекающиеся квадраты и треугольники. У каждого квадрата в одной из вершин написано число 21, в другой 42, в третьей 56, в четвертой 70. У каждого треугольника в одной из вершин написано число 30, в другой 60, в третьей 90. Из всех написанных чисел больше 24 чисел делятся на 10. Всего написано меньше 32 чисел, которые делятся на 3. Если из количества чисел, которые делятся на 7, вычесть количество чисел, которые делятся на 9, получится величина, большая 10. Найдите, сколько квадратов нарисовано.

Решение

Пусть количество квадратов равно *x*, количество треугольников *y.* Количество чисел, которые делятся на 10, равно *x*+3*y.* Количество чисел, которые делятся на 3, равно 2*x*+3*y.* Количество чисел, которые делятся на 7, равно 4*x.* Количество чисел, которые делятся на 9, равно *y.* Условие задачи записывается системой неравенств $\begin{cases} x+3y>24, \\ 2x+3y<32, \\ 4x-y>10. \end{cases}$

Перепишем эту систему в таком виде $\begin{cases} 3y>-x+24, \\ 3y<-2x+32, \\ y<4x-10. \end{cases}$

Из первого и второго неравенств получим $-x+24<-2x+32$, откуда $x<8$. Умножим третье неравенство на 3:

$$3y<12x-30$$

Из первого и третьего неравенства теперь получаем $-x+24<12x-30$, откуда $x>4\frac{2}{13}$.

Таким образом, *x* может принимать целые значения 5, 6 или 7. Последовательно подставляя эти значения в систему, получаем, что система имеет целые решения относительно *y* только, если *x=5*. Действительно,

$\begin{cases} 3y>19, \\ 3y<22, \\ y<10. \end{cases}$ $\begin{cases} y>6\dfrac{1}{3}, \\ y<7\dfrac{1}{3}, \\ y<10. \end{cases}$, т.е. *y=7.*

При *x=6* и *x=7* система не имеет целых решений относительно *y*.

Ответ: 5.

Задача 3

Найти сумму коэффициентов при ***нечетных*** степенях многочлена $P(x) = (x^4 - x^3 + 1)^{10}$.

Решение

Пусть a - сумма коэффициентов при нечетных степенях, b - сумма при четных степенях. Тогда $P(1) = a + b$, $P(-1) = b - a$. Значит $a = \frac{P(1) - P(-1)}{2} = \frac{1 - 3^{10}}{2} = -29524$.

Задача 4

В остроугольном треугольнике ABC проведены медиана BM и высота AH. BM = AH. Найти $\angle MBC$.

Решение

Площадь треугольника ABC равна $\frac{AH * BC}{2}$, а площадь треугольника BMC равна $\frac{BM * BC * \sin MBC}{2}$. Так как BM медиана, то площадь треугольника ABC в два раза больше площади треугольника BMC, то есть:

$\frac{AH * BC}{2} = 2 * \frac{BM * BC * \sin MBC}{2}$. Так как BM=AH, то $\sin MBC = \frac{1}{2}$, $\angle MBC = 30^{\circ}$.

Задача 5

Сумма нескольких последовательных натуральных чисел равна 2010. Какова максимальная длина последовательности?

Решение

Пусть a - первое число, k - количество чисел. Тогда их сумма равна $\frac{(2a + k - 1)k}{2} = 2010$.

$(2a + k - 1)k = 4020 = 67 * 60$.

Так как $2a + k - 1 > k$, то $k \leq 63$. Так как k делитель 4020, то максимальное значение $k = 60$, $a = 4$.

Ответ: 60

Задача 6

$(p+25)^q$ - квадрат натурального числа, где p и q - простые числа, меньшие 2000. Найти максимальную сумму чисел p и q.

Решение

Если $q=2$, то p - любое простое. Тогда максимальная сумма равна 2001 при $p=1999$.

Если $q\neq 2$, то $p+25=n^2$.

$p=(n-5)(n+5)$. Так как p - простое, то $n=6$, $p=11$.

Если $p=11$, то q может быть любым простым числом, кроме 2. Тогда максимальная сумма достигается при $q=1999$ и равна 2010.

Ответ: 2010

10 класс

Задача 1

Задача предложена Григорием Михайловичем Головачевым, преподавателем Академической гимназии СПбГУ, к.ф.-м.н.

Известно, что многочлен x^4+bx^2+c имеет четыре различных действительных корня, которые образуют арифметическую прогрессию с разностью d. Найдите, при каком наименьшем целом положительном d отношение $\frac{c}{b}$ является целым.

Решение

Многочлен x^4+bx^2+c является четной функцией относительно переменной x. Нам известно, что он имеет четыре различных действительных корня, это означает, что его корни образуют пары; в каждой паре корни равны по модулю и противоположны. По условию, эти четыре корня составляют арифметическую прогрессию с положительной разностью d. Можно представить корни как четыре точки на координатной прямой. Они расположенные симметрично вокруг 0, расстояние между соседними точками равно d. Из всего сказанного следует, что корни нашего многочлена можно считать равными числам $-\frac{3}{2}d; -\frac{1}{2}d; \frac{1}{2}d; \frac{3}{2}d$ соответственно. Как известно, если многочлен имеет четыре различных корня $x_1; x_2; x_3; x_4$, он представляется в виде произведения $P(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$. В нашем случае $x^4+bx^2+c=(x+\frac{3}{2}d)(x+\frac{1}{2}d)(x-\frac{1}{2}d)(x-\frac{3}{2}d)=(x^2-\frac{9}{4}d^2)(x^2-\frac{1}{4}d^2)$. Этот же результат можно было получить другими рассуждениями, заметив, что квадратный трехчлен t^2+bt+c по условию имеет два положительных корня. Раскроем скобки: $(x^2-\frac{9}{4}d^2)(x^2-\frac{1}{4}d^2)=x^4-\frac{10}{4}d^2x^2+\frac{9}{16}d^4$. Отсюда $b=-\frac{5}{2}d^2$, $c=\frac{9}{16}d^4$. Отношение $\frac{c}{b}=\frac{9d^2}{5\cdot 8}=\frac{9d^2}{10\cdot 4}$. Это отношение будет целым, если d^2 делится на 40, это возможно только при d, кратном 10. Наименьшее d, удовлетворяющее условию задачи, равно 20.

Ответ 20.

Задача 2

Задача предложена Григорием Михайловичем Головачевым, преподавателем Академической гимназии СПбГУ, к.ф.-м.н.

На координатной плоскости нарисованы две параболы $y = x^2$ и $y = -x^2 + px + q$. Известно, что они пересекаются в точках *A* и *B*, и что вторая парабола пересекает ось *OX* в точках *A* и *C*. На плоскости построили квадрат со стороной *AC*. Оказалось, что точка *B* находится на его стороне, противоположной *AC*. Найдите наибольшее значение квадратичной функции $y = -x^2 + px + q$.

Решение

Поскольку точка *A* находится одновременно на оси *OX* и на параболе $y = x^2$, то *A* – это начало координат. Вторая парабола проходит через начало координат, отсюда $q = 0$. Тогда точка *C* находится на оси *OX* и на параболе $y = -x^2 + px + q$, получаем, что она имеет координаты $C(p;0)$. Пусть точка *B* имеет абсциссу x_1. ($x_1 \neq 0$) Условие, что параболы пересекаются в точке B, приводит нас к уравнению $x_1^2 = -x_1^2 + px_1$. Выражаем x_1 через *p*, получаем $x_1 = \frac{p}{2}$. Получаем, что точка *B* имеет координаты $B\left(\frac{p}{2};\frac{p^2}{4}\right)$. Сторона *AC* квадрата имеет длину *p.* Ордината точки B равна стороне квадрата, отсюда $\frac{p^2}{4} = p$, и *p=4*. Необходимо заметить, что точка *B* является вершиной второй параболы, т.е. парабола касается горизонтальной стороны квадрата в точке *B*, и наибольшее значение функции $y = -x^2 + px + q$ равно ординате точки *B,* т.е. равно 4*.*

Ответ: 4.

Задача 3

Дан треугольник ABC и точка O внутри него; d_a, d_b и d_c - расстояния до сторон BC, AC и BC. Координаты точек A(0,0), B(4,6) и C(2,9). Найти сумму координат точки O, при условии что произведение $d_a d_b d_c$ максимально.

Решение

Удвоенная площадь треугольника ABC равна $d_a a + d_b b + d_c c$, где a, b, c длины сторон BC, AC, AB соответственно. $d_a d_b d_c$ максимально тогда, когда максимально $d_a d_b d_c abc$. Т.к, $d_a a + d_b b + d_c c$ фиксировано, то их произведение максимально тогда, когда $d_a a = d_b b = d_c c$. Если BO пересекается с AC в точке B_1, то $AB_1 : B_1C = S_{ABO} : S_{BOC} = d_c c : d_a a = 1$. Следовательно, O - центр масс треугольника ABC, имеющая координаты как среднее арифметическое координат вершин, т.е. (2,5).

Ответ: 7

Задача 4

Дано 2010 точек на окружности. Каждую пару точек соединили отрезком, причем никакие три отрезка не пересекаются в одной точке. Найти количество точек пересечения (пересечения по концам отрезков не считаются).

Решение

Выберем любые 4 точки на окружности, в этом выпуклом четырехугольнике ровно одна точка пересечения диагоналей, следовательно, т.к. все эти точки пересечения разные, искомых точек столько же, сколько способов выбрать 4 точки из 2010, т.е. $C_{2010}^{4} = 678072034710$.

Ответ: 678072034710

Задача 5

Найти сумму положительных коэффициентов многочлена $P(x) = (x^4 - x^3 + 1)^{10}$.

Решение:

Каждый четный коэффициент равен сумме неотрицательных чисел, т.к. в каждой скобке при нечетных степенях стоят либо 0, либо -1, а при четных - 0 или 1, причем для четной степени нужно перемножить четное число чисел, стоящих при нечетных степенях, и любое при четных. Аналогично, все нечетные коэффициенты не положительны. Тогда искомая сумма равна сумме четных коэффициентов, т.е. $\frac{P(1) + P(-1)}{2}$, что равно 29525.

Ответ: 29525

Задача 6

Найти наибольшее натуральное число n, которое делится на все числа, меньшие чем $\sqrt{n}$.

Решение

Пусть $k^2 < n \leq (k+1)^2$. Тогда n делится на k, $k-1$, $k-2$. Т.к. их попарные НОД не больше 2, то n делится на $\frac{(k-2)(k-1)k}{2}$. Отсюда

$\frac{(k-2)(k-1)k}{2} \leq (k+1)^2$, откуда $k \leq 5$. Тогда $n \leq 36$. Полным перебором получаем $n = 24$.

Ответ: 24.

ХИМИЯ

8 класс

Задача 1

Задача предложена АГ СПбГУ

К образованию π-связи **не может** приводить перекрывание:

А) двух *p*-орбиталей;

Б) двух *d*-орбиталей

В) *s*- и *p*-орбиталей;

Г) *p*- и *d*-орбиталей

Решение:

Перекрывание атомной *s*-орбитали с другими орбиталями всегда происходит так, что максимум электронной плотности располагается на линии, соединяющей ядра атомов.

Ответ: В.

Задача 2

Задача предложена АГ СПбГУ

В ряду щелочных металлов наименьшую электроотрицательность имеет цезий. Это обусловлено тем, что он имеет:

А) наибольшее число нейтронов в ядре;

Б) большее (по сравнению с другими щелочными металлами) число валентных электронов;

В) большую атомную массу;

Г) самый большой атомный радиус.

Ответ: Г.

Задача 3

Задача предложена Натальей Игоревной Морозовой, старшим преподавателем СУНЦ МГУ

Какие пары веществ можно использовать для получения сероводорода в пробирке с пробкой и газоотводной трубкой?

1) цинк и сероводородная кислота;

2) сульфид бария и соляная кислота;

3) мрамор и серная кислота;

4) сульфид натрия и вода;

5) сульфат кальция и соляная кислота

6) цинк и сернистая кислота;

7) сульфат железа (II) и соляная кислота;

8) сульфид цинка и соляная кислота.

Решение

$$1)\ Zn + H_2S = ZnS + H_2.$$

Сероводород здесь реагент, а не продукт. Кстати, эта реакция не пойдет в сколько-нибудь заметной степени, т.к. сероводород а) малорастворим в воде, б) является очень слабой кислотой.

$$2)\ BaS + 2HCl = H_2S\uparrow + BaCl_2$$

$$3)\ CaCO_3 + H_2SO_4 = CaSO_4 + CO_2 + H_2O.$$

В лучшем случае Вы получите углекислый газ вместо сероводорода. На самом деле Вы и его не получите в заметной степени, т.к. сульфат кальция малорастворим и будет обволакивать поверхность мрамора, препятствуя реакции с кислотой.

$$4)\ Na_2S + H_2O \rightleftharpoons NaHS + NaOH.$$

Максимум, что может пройти в растворе сульфида натрия - это обратимый гидролиз по аниону. В основном он протекает по 1-й ступени. 2-я ступень (с образованием сероводорода) практически не протекает.

$$5)\ CaSO_4 + HCl \neq$$

$$6)\ Zn + H_2SO_3 = ZnSO_3 + H_2.$$

Может выделиться водород, но и это весьма маловероятно, т.к. сернистая кислота а) малорастворима в воде, б) является слабой кислотой.

$$7)\ FeSO_4 + HCl \neq$$

$$8)\ ZnS + 2HCl = H_2S\uparrow + ZnCl_2$$

Ответы: 2); 8).

Задача 4

Задача предложена Натальей Игоревной Морозовой, старшим преподавателем СУНЦ МГУ

При рентгеновском исследовании желудка и пищевода пациент выпивает 1-2 стакана водной взвеси "нерастворимого" сернокислого бария. Известно, что насыщенный раствор $BaSO_4$ содержит 0,00001 моль соли в литре.

Сколько формульных единиц сульфата бария (в штуках) содержится в 1 мл такого раствора? Сколько граммов сульфата бария растворено в 1 мл? Введите оба ответа в виде a*10^b, число a должно быть округлено до целых.

Решение

Если в 1 л содержится 0,00001 моль (10^{-5}), то в 1 мл - в тысячу раз меньше, т.е. 10^{-8} моль.

В штуках это составит:

$$N = n \cdot N_A = 10^{-8} \cdot 6 \cdot 10^{23} = 6 \cdot 10^{17}.$$

Найдем массу сульфата бария:

$$m(BaSO_4) = n(BaSO_4) \cdot M(BaSO_4) = 10^{-8} \cdot 233 = 2{,}33 \cdot 10^{-6} \approx 2 \cdot 10^{-6} \text{ г.}$$

Ответ: 1) 6*10^17, 2) 2*10^(-6)

Задача 5.

Задача предложена Натальей Игоревной Морозовой, старшим преподавателем СУНЦ МГУ

Расположите перечисленные вещества по типу связи от наиболее ионной (слева) до наименее полярной ковалентной (справа):

1) $AlCl_3$, 2) I_2, 3) CBr_4, 4) $SrCl_2$, 5) ICl_3, 6) RbF, 7) IBr.

В ответе запишите последовательность цифр без пробелов.

Решение

В списке присутствует вещество с ковалентной неполярной связью - I_2. Именно оно будет справа.

Вещества с ионной связью: $SrCl_2$, RbF. В школе считается, что связь между металлом и неметаллом всегда ионная, поэтому Вы можете причислить сюда же $AlCl_3$, хотя на самом деле связь в этом веществе ковалентная, но суть решения от этого не меняется. Максимальная ионность связи в соединении будет при максимальной разности электроотрицательностей атомов. Разницу электроотрицательностей можно оценить качественно. Рубидий - более типичный металл, чем стронций (а он, в свою очередь, чем алюминий). Фтор - более типичный неметалл, чем хлор. Поэтому связь Rb-F имеет более ионный храктер, чем Sr-Cl, а последняя - более ионный, чем Al-Cl.

Рассмотрим оставшиеся соединения. Это соединения неметаллов: CBr_4, ICl_3, IBr. Разница электроотрицательностей между элементом IV группы (углеродом) и галогеном, конечно, больше, чем у галогенов (иода, брома, хлора) между собой. Разница электроотрицательностей между иодом и бромом меньше, чем между иодом и хлором, т.к. иод и бром находятся в соседних периодах. Поэтому связь C-Br полярнее, чем I-Cl, а она, в свою очередь - чем I-Br.

Ответ: 6413572

Задача 6

Задача предложена Натальей Игоревной Морозовой, старшим преподавателем СУНЦ МГУ

В состав соли кислородсодержащей кислоты входит, кроме кислорода, 27,88% натрия и 33,33% марганца. Напишите формулу соли (индексы вводите как строчные цифры, например: Cu_2O) и назовите эту соль.

Решение

Формула в общем виде: $Na_xMn_yO_z$.

Найдем содержание кислорода в соли:

$$\omega(O) = 100 - \omega(Na) - \omega(Mn) = 100 - 27{,}88 - 33{,}33 = 38{,}79\%.$$

Выразим соотношение между количестами атомов в формуле соли:

$$x : y : z = n(Na) : n(Mn) : n(O) = m(Na)/M(Na) : m(Mn)/M(Mn) : m(O)/M(O) =$$
$$27{,}88/23 : 33{,}33/55 : 38{,}79/16 = 1{,}212 : 0{,}606 : 2{,}424 = 2 : 1 : 4.$$

Формула соли - Na_2MnO_4.

Название соли - манганат натрия.

Ответы: Na2MnO4, манганат натрия

9 класс

Задача 1

Задача предложена Натальей Игоревной Морозовой, старшим преподавателем СУНЦ МГУ

Расположите перечисленные вещества по типу связи от наиболее ионной (слева) до наименее полярной ковалентной (справа):

1) $AlCl_3$, 2) I_2, 3) CBr_4, 4) $SrCl_2$, 5) ICl_3, 6) RbF, 7) IBr.

В ответе запишите последовательность цифр без пробелов.

Решение

В списке присутствует вещество с ковалентной неполярной связью - I_2. Именно оно будет справа.

Вещества с ионной связью: $SrCl_2$, RbF. В школе считается, что связь между металлом и неметаллом всегда ионная, поэтому Вы можете причислить сюда же $AlCl_3$, хотя на самом деле связь в этом веществе ковалентная, но суть решения от этого не меняется. Максимальная ионность связи в соединении будет при максимальной разности электроотрицательностей атомов. Разницу электроотрицательностей можно оценить качественно. Рубидий - более типичный металл, чем стронций (а он, в свою очередь, чем алюминий). Фтор - более типичный неметалл, чем хлор. Поэтому связь Rb-F имеет более ионный храктер, чем Sr-Cl, а последняя - более ионный, чем Al-Cl.

Рассмотрим оставшиеся соединения. Это соединения неметаллов: CBr_4, ICl_3, IBr. Разница электроотрицательностей между элементом IV группы (углеродом) и галогеном, конечно, больше, чем у галогенов (иода, брома, хлора) между собой. Разница электроотрицательностей между иодом и бромом меньше, чем между иодом и хлором, т.к. иод и бром находятся в соседних периодах. Поэтому связь C-Br полярнее, чем I-Cl, а она, в свою очередь - чем I-Br.

Ответ: 6413572

Задача 2

Задача предложена Натальей Игоревной Морозовой, старшим преподавателем СУНЦ МГУ

В состав соли кислородсодержащей кислоты входит, кроме кислорода, 27,88% натрия и 33,33% марганца. Напишите формулу соли (индексы вводите как строчные цифры, например: Cu_2O) и назовите эту соль.

Решение

Формула в общем виде: $Na_xMn_yO_z$.

Найдем содержание кислорода в соли:

$$\omega(O) = 100 - \omega(Na) - \omega(Mn) = 100 - 27{,}88 - 33{,}33 = 38{,}79\%.$$

Выразим соотношение между количестами атомов в формуле соли:

$$x : y : z = n(Na) : n(Mn) : n(O) = m(Na)/M(Na) : m(Mn)/M(Mn) : m(O)/M(O) =$$
$$27{,}88/23 : 33{,}33/55 : 38{,}79/16 = 1{,}212 : 0{,}606 : 2{,}424 = 2 : 1 : 4.$$

Формула соли - Na_2MnO_4.

Название соли - манганат натрия.

Ответы: Na2MnO4, манганат натрия

Задача 3

Задача предложена Натальей Игоревной Морозовой, старшим преподавателем СУНЦ МГУ

Какие пары веществ можно использовать для получения сероводорода в пробирке с пробкой и газоотводной трубкой?

1) цинк и сероводородная кислота;

2) сульфид бария и соляная кислота;

3) мрамор и серная кислота;

4) сульфид натрия и вода;

5) сульфат кальция и соляная кислота

6) цинк и сернистая кислота;

7) сульфат железа (II) и соляная кислота;

8) сульфид цинка и соляная кислота.

Решение

$$1)\ Zn + H_2S = ZnS + H_2.$$

Сероводород здесь реагент, а не продукт. Кстати, эта реакция не пойдет в сколько-нибудь заметной степени, т.к. сероводород а) малорастворим в воде, б) является очень слабой кислотой.

$$2)\ BaS + 2HCl = H_2S\uparrow + BaCl_2$$

$$3)\ CaCO_3 + H_2SO_4 = CaSO_4 + CO_2 + H_2O.$$

В лучшем случае Вы получите углекислый газ вместо сероводорода. На самом деле Вы и его не получите в заметной степени, т.к. сульфат кальция малорастворим и будет обволакивать поверхность мрамора, препятствуя реакции с кислотой.

$$4)\ Na_2S + H_2O \rightleftharpoons NaHS + NaOH.$$

Максимум, что может пройти в растворе сульфида натрия - это обратимый гидролиз по аниону. В основном он протекает по 1-й ступени. 2-я ступень (с образованием сероводорода) практически не протекает.

$$5)\ CaSO_4 + HCl \neq$$

$$6)\ Zn + H_2SO_3 = ZnSO_3 + H_2.$$

Может выделиться водород, но и это весьма маловероятно, т.к. сернистая кислота а) малорастворима в воде, б) является слабой кислотой.

$$7)\ FeSO_4 + HCl \neq$$

$$8)\ ZnS + 2HCl = H_2S\uparrow + ZnCl_2$$

Ответы: 2); 8).

Задача 4

Задача предложена Натальей Игоревной Морозовой, старшим преподавателем СУНЦ МГУ

При рентгеновском исследовании желудка и пищевода пациент выпивает 1-2 стакана водной взвеси "нерастворимого" сернокислого бария. Известно, что насыщенный раствор $BaSO_4$ содержит 0,00001 моль соли в литре.

Сколько формульных единиц сульфата бария (в штуках) содержится в 1 мл такого раствора? Сколько граммов сульфата бария растворено в 1 мл? Введите оба ответа в виде a*10^b, число a должно быть округлено до целых.

Решение

Если в 1 л содержится 0,00001 моль (10^{-5}), то в 1 мл - в тысячу раз меньше, т.е. 10^{-8} моль.

В штуках это составит:

$$N = n \cdot N_A = 10^{-8} \cdot 6 \cdot 10^{23} = 6 \cdot 10^{17}.$$

Найдем массу сульфата бария:

$$m(BaSO_4) = n(BaSO_4) \cdot M(BaSO_4) = 10^{-8} \cdot 233 = 2{,}33 \cdot 10^{-6} \approx 2 \cdot 10^{-6} \text{ г.}$$

Ответ: 1) 6*10^17, 2) 2*10^(-6)

Задача 5.

Задача предложена АГ СПбГУ

Кислую реакцию среды имеет раствор следующей соли:

А) нитрат галлия;

Б) фторид калия;

В) перхлорат бария;

Г) бромид цезия.

Решение:

Кислую реакцию среды будет иметь раствор соли, образованной слабым основанием и сильной кислотой. Гидроксиды щелочных (калий, цезий) и щелочноземельных (барий) металлов относятся к сильным основанием. Напротив, гидроксид галлия в число сильных оснований не входит. Азотная же кислота является сильным электролитом:

$Ga(NO_3)_3 + H_2O \rightleftarrows GaOH(NO_3)_2 + HNO_3$

$Ga^{3+} + H_2O \rightleftarrows GaOH^{2+} + H^+$

Ответ: А.

Задача 6

В процессе синтеза аммиака из азота и водорода повышение температуры необходимо для:

А) смещения равновесия в сторону продуктов реакции;

Б) уменьшения потерь продукта;

В) увеличения скорости реакции;

Г) повышения эффективности катализатора.

Ответ: В.

Решение:

Поскольку реакция синтеза аммиака экзотермична, повышение температуры приводит к смещению равновесия в сторону исходных веществ. На потери и катализатор повышение температуры не действует. Следовательно, повышение температуры необходимо для повышения скорости реакции (и, соответственно, уменьшения времени достижения равновесия).

10 класс

Задача 1

Задача предложена АГ СПбГУ

Пропилбензол проявляет свойства алканов в реакции:

А) алкилирования;

Б) бромирования в присутствии катализатора $FeBr_3$;

В) ацилирования;

Г) бромирования при облучении.

Ответ: Г.

Решение:

Реакции алкилирования и ацилирования – характерные реакции ароматических соединений. В присутствии трибромида железа бромирование пойдет в ароматическое ядро. Бромирование боковой цепи протекает только при облучении:

$C_6H_5\text{-}CH_2\text{-}CH_2\text{-}CH_3 + Br_2 = HBr + C_6H_5\text{-}CHBr\text{-}CH_2\text{-}CH_3$

Задача 2

Задача предложена АГ СПбГУ

При озонировании бутадиена-1,3 в качестве единственного органического продукта образуется:

А) этаналь;

Б) уксусная кислота;

В) щавелевая кислота;

Г) масляная кислота.

Решение:

В реакции озонирования алкенов происходит разрыв двойных связей с окислением концевых атомов углерода до карбоксильной (первичный атом углерода) или карбонильной (вторичный атом) группы. CH_2-группа при этом окисляется до углекислого газа. В данной реакции получается кислота HOOCCOOH, то есть, щавелевая кислота.

Ответ: В.

Задача 3

Задача предложена Натальей Игоревной Морозовой, старшим преподавателем СУНЦ МГУ

Какие пары веществ можно использовать для получения сероводорода в пробирке с пробкой и газоотводной трубкой?

1) цинк и сероводородная кислота;

2) сульфид бария и соляная кислота;

3) мрамор и серная кислота;

4) сульфид натрия и вода;

5) сульфат кальция и соляная кислота

6) цинк и сернистая кислота;

7) сульфат железа (II) и соляная кислота;

8) сульфид цинка и соляная кислота.

Решение

$$1)\ Zn + H_2S = ZnS + H_2.$$

Сероводород здесь реагент, а не продукт. Кстати, эта реакция не пойдет в сколько-нибудь заметной степени, т.к. сероводород а) малорастворим в воде, б) является очень слабой кислотой.

$$2)\ BaS + 2HCl = H_2S\uparrow + BaCl_2$$

$$3)\ CaCO_3 + H_2SO_4 = CaSO_4 + CO_2 + H_2O.$$

В лучшем случае Вы получите углекислый газ вместо сероводорода. На самом деле Вы и его не получите в заметной степени, т.к. сульфат кальция малорастворим и будет обволакивать поверхность мрамора, препятствуя реакции с кислотой.

$$4)\ Na_2S + H_2O \rightleftharpoons NaHS + NaOH.$$

Максимум, что может пройти в растворе сульфида натрия - это обратимый гидролиз по аниону. В основном он протекает по 1-й ступени. 2-я ступень (с образованием сероводорода) практически не протекает.

$$5)\ CaSO_4 + HCl \neq$$

$$6)\ Zn + H_2SO_3 = ZnSO_3 + H_2.$$

Может выделиться водород, но и это весьма маловероятно, т.к. сернистая кислота а) малорастворима в воде, б) является слабой кислотой.

$$7)\ FeSO_4 + HCl \neq$$

$$8)\ ZnS + 2HCl = H_2S\uparrow + ZnCl_2$$

Ответы: 2); 8).

Задача 4

Задача предложена Натальей Игоревной Морозовой, старшим преподавателем СУНЦ МГУ

При рентгеновском исследовании желудка и пищевода пациент выпивает 1-2 стакана водной взвеси "нерастворимого" сернокислого бария. Известно, что насыщенный раствор $BaSO_4$ содержит 0,00001 моль соли в литре.

Сколько формульных единиц сульфата бария (в штуках) содержится в 1 мл такого раствора? Сколько граммов сульфата бария растворено в 1 мл? Введите оба ответа в виде a*10^b, число а должно быть округлено до целых.

Решение

Если в 1 л содержится 0,00001 моль (10^{-5}), то в 1 мл - в тысячу раз меньше, т.е. 10^{-8} моль.

В штуках это составит:

$$N = n \cdot N_A = 10^{-8} \cdot 6 \cdot 10^{23} = 6 \cdot 10^{17}.$$

Найдем массу сульфата бария:

$$m(BaSO_4) = n(BaSO_4) \cdot M(BaSO_4) = 10^{-8} \cdot 233 = 2{,}33 \cdot 10^{-6} \approx 2 \cdot 10^{-6} \text{ г.}$$

Ответ: 1) 6*10^17, 2) 2*10^(-6)

Задача 5.

Задача предложена Натальей Игоревной Морозовой, старшим преподавателем СУНЦ МГУ

Расположите перечисленные вещества по типу связи от наиболее ионной (слева) до наименее полярной ковалентной (справа):

1) $AlCl_3$, 2) I_2, 3) CBr_4, 4) $SrCl_2$, 5) ICl_3, 6) RbF, 7) IBr.

В ответе запишите последовательность цифр без пробелов.

Решение

В списке присутствует вещество с ковалентной неполярной связью - I_2. Именно оно будет справа.

Вещества с ионной связью: $SrCl_2$, RbF. В школе считается, что связь между металлом и неметаллом всегда ионная, поэтому Вы можете причислить сюда же $AlCl_3$, хотя на самом деле связь в этом веществе ковалентная, но суть решения от этого не меняется. Максимальная ионность связи в соединении будет при максимальной разности электроотрицательностей атомов. Разницу электроотрицательностей можно оценить качественно. Рубидий - более типичный металл, чем стронций (а он, в свою очередь, чем алюминий). Фтор - более типичный неметалл, чем хлор. Поэтому связь Rb-F имеет более ионный храктер, чем Sr-Cl, а последняя - более ионный, чем Al-Cl.

Рассмотрим оставшиеся соединения. Это соединения неметаллов: CBr_4, ICl_3, IBr. Разница электроотрицательностей между элементом IV группы (углеродом) и галогеном, конечно, больше, чем у галогенов (иода, брома, хлора) между собой. Разница электроотрицательностей между иодом и бромом меньше, чем между иодом и хлором, т.к. иод и бром находятся в соседних периодах. Поэтому связь C-Br полярнее, чем I-Cl, а она, в свою очередь - чем I-Br.

Ответ: 6413572

Задача 6

Задача предложена Натальей Игоревной Морозовой, старшим преподавателем СУНЦ МГУ

В состав соли кислородсодержащей кислоты входит, кроме кислорода, 27,88% натрия и 33,33% марганца. Напишите формулу соли (индексы вводите как строчные цифры, например: Cu_2O) и назовите эту соль.

Решение

Формула в общем виде: $Na_xMn_yO_z$.

Найдем содержание кислорода в соли:

$$\omega(O) = 100 - \omega(Na) - \omega(Mn) = 100 - 27{,}88 - 33{,}33 = 38{,}79\%.$$

Выразим соотношение между количестами атомов в формуле соли:

$$x : y : z = n(Na) : n(Mn) : n(O) = m(Na)/M(Na) : m(Mn)/M(Mn) : m(O)/M(O) =$$
$$27{,}88/23 : 33{,}33/55 : 38{,}79/16 = 1{,}212 : 0{,}606 : 2{,}424 = 2 : 1 : 4.$$

Формула соли - Na_2MnO_4.

Название соли - манганат натрия.

Ответы: Na2MnO4, манганат натрия